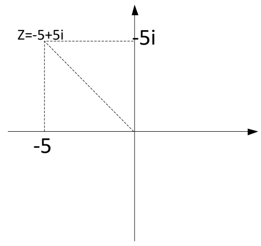
Тест1(для подготовки к контрольной номер 1 семестр 4 математический анализ)

1. Вычислить а)$(-5+5i)^{100}$

найдем модуль и аргумент нашего числа



$|-5+5i| = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$

$arg(-5+5i) = \frac{3\pi}{4}$

тогда

$$(-5+5i)^{100} = \left(5\sqrt{2}\right)^{100} \cdot \left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right)^{100} =$$

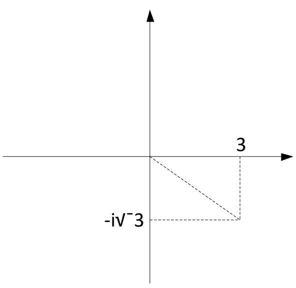
$$= \left(5\sqrt{2}\right)^{100} \cdot \left(cos\frac{3\cdot 100\cdot\pi}{4} + isin\frac{3\cdot 100\cdot\pi}{4}\right) \quad = (25\cdot 2)^{50} \cdot (cos75\pi + isin75\pi) =$$
$$= (50)^{50} \cdot (cos\pi + isin\pi) = -(50)^{50}$$

Ответ: $-(50)^{50}$

б) $\left(3-\sqrt{3}i\right)^{-2i}$

$\left(3-\sqrt{3}i\right)^{-2i} = e^{-2iLn\left(3-\sqrt{3}i\right)}$ представили комплексное число, используя свойство обобщено-показательной функции.

$$Ln\left(3-\sqrt{3}i\right) = ln\left|3-\sqrt{3}i\right| + i\left(arg\left(3-\sqrt{3}i\right) + 2\pi k\right)$$
$$= ln\left(2\sqrt{3}\right) + i\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$$



Модуль и аргумент комплексного числа находим аналогично пункту а), обязательно изображаем число на комплексной плоскости.

$$\left(3-\sqrt{3}i\right)^{-2i} = e^{-2iLn\left(3-\sqrt{3}i\right)} =$$

$$e^{-\frac{\pi}{3}+4\pi k-2iln\left(2\sqrt{3}\right)} =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{3}+4\pi k} \cdot e^{-2iln\left(2\sqrt{3}\right)} =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{3}+4\pi k} \cdot \left(cos\left(2ln\left(2\sqrt{3}\right)\right) - isin\left(2ln\left(2\sqrt{3}\right)\right)\right) =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{3}+4\pi k} cos\left(2ln\left(2\sqrt{3}\right)\right) - ie^{-\frac{\pi}{3}+4\pi k} sin\left(2ln\left(2\sqrt{3}\right)\right)$$

Ответ: $e^{-\frac{\pi}{3}+4\pi k} cos\left(2ln\left(2\sqrt{3}\right)\right) - ie^{-\frac{\pi}{3}+4\pi k} sin\left(2ln\left(2\sqrt{3}\right)\right)$

2. Решить уравнение, корни уравнения изобразить на комплексной плоскости

а)$\boldsymbol{z^3 + 125i = 0}$

$z^3 = -125i$

$z = \sqrt[3]{-125i} =$

$$= \sqrt[3]{|-125i|} \cdot \left(cos\frac{arg(-125i) + 2\pi k}{3} + isin\frac{arg(-125i) + 2\pi k}{3}\right)$$

найдем модуль и аргумент нашего числа

$$|-125i| = 125$$

$$arg(-125i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$z = 5 \cdot \left(cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + isin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right)$$

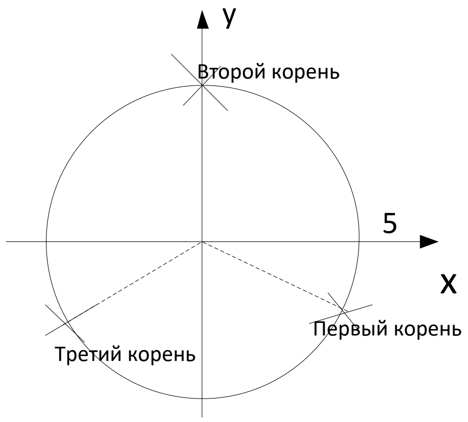
Находим z при всевозможных значениях k

Ответ:

$k = 0 \quad z_1 = 5 \cdot \left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$k = 1 \quad z_2 = 5 \cdot \left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$k = 2 \quad z_3 = 5 \cdot \left(cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$



б) $\mathbf{\sin(2z) = 2}$

$\sin(2z) = \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i}$, по определению

Тогда уравнение имеет вид

$\frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = 2.$

Перепишем в виде

$e^{2iz} - e^{-2iz} = 4i$ делаем замену $t = e^{2iz}$, получаем уравнение

$t^2 - 4it - 1 = 0$

Решая уравнение получаем

$t_{1,2} = 2i \pm \sqrt{(2i)^2 + 1}$ переходим к старым переменным

$e^{2iz} = 2i \pm \sqrt{(2i)^2 + 1} = 2i \pm \sqrt{-3} = 2i \pm i\sqrt{3} = i(2 \pm \sqrt{3})$

$e^{2iz} = i(2 \pm \sqrt{3})$ *взяв* логарифм от обеих частей, имеем

$$2iz = Ln\left(i(2i \pm \sqrt{3})\right) = ln\left|i(2 \pm \sqrt{3})\right| + i\left(arg\left(i(2 \pm \sqrt{3})\right) + 2\pi k\right)$$

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} i \cdot Ln\left(i\left(2 \pm \sqrt{3}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} i \cdot \left(ln\left|i\left(2 \pm \sqrt{3}\right)\right| + i\left(arg\left(i\left(2 \pm \sqrt{3}\right)\right) + 2\pi k\right)\right)$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} i \cdot \left(ln\left|i\left(2 + \sqrt{3}\right)\right| + i\left(arg\left(i\left(2 + \sqrt{3}\right)\right) + 2\pi k\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} i \cdot \left(ln\left(2 + \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right) = \frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{1}{2} i ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

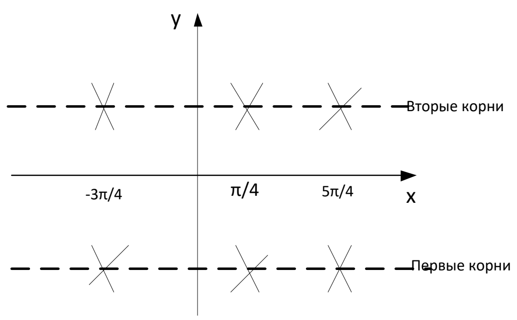
$$z_2 = -\frac{1}{2} i \cdot \left(ln\left|i\left(2 - \sqrt{3}\right)\right| + i\left(arg\left(i\left(2 - \sqrt{3}\right)\right) + 2\pi k\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} i \cdot \left(ln\left(2 - \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right) = \frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{1}{2} i ln\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

Ответ:

$$z_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{1}{2} i ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

$$z_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k - \frac{1}{2} i ln\left(2 - \sqrt{3}\right)$$



3. Проверить аналитичность функции $f(z)$

а) $f(z) = iz^2 + 27i + 3\bar{z}$

Выделим действительную $u(x, y)$ и мнимую $v(x, y)$ части функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$\mathrm{f(z)} = \mathrm{iz}^2 + 27\mathrm{i} + 3\bar{\mathrm{z}} = i(x + iy)^2 + 27i + 3(x - iy) =$

$= i(x^2 - y^2) - 2xy + 27i + 3x - i3y =$

$= (-2xy + 3x) + i(x^2 - y^2 + 27 - 3y)$

Таким образом действительная часть нашей функции равна

$$u(x, y) = -2xy + 3x$$

а мнимая равна

$$v(x, y) = x^2 - y^2 + 27 - 3y$$

Воспользуемся условием Коши-Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2y + 3$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2y - 3$$

Как видно, условие Коши-Римана не выполняется

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

Вывод: функция $f(z) = iz^2 + 27i + 3\bar{z}$ **не аналитична**

б) $f(z) = e^{iz} + 2i$

Выделим действительную $u(x,y)$ и мнимую $v(x,y)$ части функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$f(z) = e^{iz} + 2i$=$e^{i(x+iy)} + 2i = e^{-y} \cdot e^{ix} + 2i =$

$= e^{-y}(cosx + isinx) + 2i = (e^{-y}cosx) + i(e^{-y}sinx + 2)$

Таким образом, действительная часть нашей функции равна

$$u(x,y) = e^{-y}cosx$$

а мнимая равна

$$v(x,y) = e^{-y}sinx + 2$$

Воспользуемся условием Коши-Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y}sinx$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y}sinx$$

И

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y}cosx$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-y}cosx$$

Как видно, условие Коши-Римана выполняется

Вывод: функция $f(z) = e^{iz} + 2i$ **аналитична**

4. Изобразить на комплексной плоскости

$$\begin{cases} \mathbf{0} < \boldsymbol{argz} < \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} \\ |\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i}| < \mathbf{3} \end{cases}$$

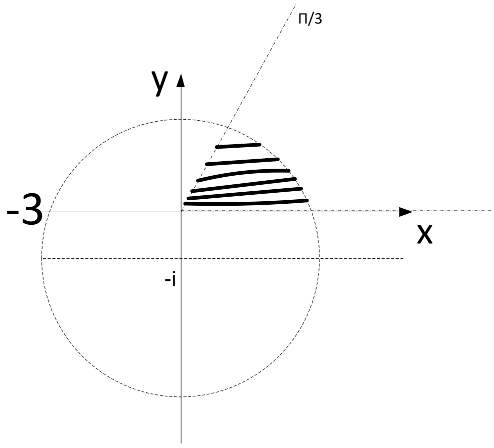
Считаем модуль

$$|\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{y}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}}} < \mathbf{3}$$

Система примет вид

$$\begin{cases} \mathbf{0} < \boldsymbol{argz} < \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} \\ \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{y}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}} < \mathbf{9} \end{cases}$$

Имеем уравнение окружности с центром в точке (0,-1) и радиусом 3



5. Восстановить аналитичную функцию $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{iv}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

$$\underline{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Jmf}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{2}\boldsymbol{xy} + \mathbf{7}\boldsymbol{y} + \mathbf{2} \quad , \quad \boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{2}\boldsymbol{i}}$$

Воспользуемся условием Коши-Римана так как функция

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитична

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$Jmf(z) = v(x,y) = 2xy + 7y + 2$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 7 = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad =>$$

$$u = \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \varphi(y) = \int (2x+7)\, dx + \varphi(y) = x^2 + 7x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad =>$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y) = -2y \qquad =>$$

$$\varphi(y) = \int (-2y)\, dy = -y^2 + C$$

Таким образом $u(x,y) = x^2 + 7x - y^2 + C$

а $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 + 7x - y^2 + C + i(2xy + 7y + 2) =$

$=z^2 + 7z + C + i2$ *учитывая, что* $x = z \quad y = 0$

$$f(0) = C + 2i = 2i \quad => \quad C = 0$$

$$f(z) = z^2 + 7z + 2i$$

Ответ: $\underline{\boldsymbol{f(z) = z^2 + 7z + 2i}}$