

Тест 2 для подготовки к контрольной работе, зачету, экзамену

(4 семестр , математический анализ)

1. а) Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{2+3z}$ в ряд Лорана в области $|z| > \frac{2}{3}$ по степеням z .

Решение: преобразуем функцию

$$f(z) = \frac{1}{2+3z} = \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3z}}$$

Используем разложение (которое знаем наизусть)

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots, \text{ сходится при } |z| < 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2+3z} = \frac{1}{3z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3z}} = \\ &= \frac{1}{3z} \left(1 - \frac{2}{3z} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{z^2} - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{z^3} + \dots + (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{z^n} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{3z} - \frac{2}{3^2 z^2} + \frac{2^2}{3^3 z^3} - \frac{2^3}{3^4 z^4} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{2^n}{3^{n+1} z^{n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Область сходимости $\left| \frac{2}{3z} \right| < 1$ или $|z| > \frac{2}{3}$

1. б) Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{4z-5+z^2}$ в ряд Лорана по степеням z во всей комплексной плоскости, указать правильную и главную части ряда.

Решение: разложим функцию на простейшие дроби

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4z-5+z^2} = \frac{1}{(z+5)(z-1)} = \frac{A}{(z+5)} + \frac{B}{(z-1)} = \\ &= -\frac{1}{6(z+5)} + \frac{1}{6(z-1)} \end{aligned}$$

Особые точки функции $f(z)$ находим, приравнявая знаменатель к нулю

$$(z + 5)(z - 1) = 0.$$

Особые точки $z_1 = -5, z_2 = 1$.

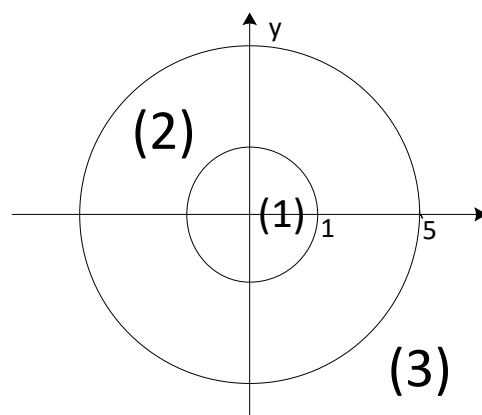
Сделаем чертеж

Получаем три области:

(1) область $|z| < 1$

(2) область $1 < |z| < 5$

(3) область $5 < |z|$



Разложение в (1) области $|z| < 1$, используем разложение $\langle 1 \rangle$ (которое знаем наизусть) и разложение (которое тоже знаем наизусть)

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots, \text{ сходитя при } |z| < 1 \quad \langle 2 \rangle$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{6(z-1)} - \frac{1}{6(z+5)} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-z} - \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{5}} = \\ &= -\frac{1}{6}(1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots) - \frac{1}{30} \left(1 - \frac{z}{5} + \frac{z^2}{5^2} - \frac{z^3}{5^3} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{5^n} + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{6}(1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} - \frac{z}{5^2} + \frac{z^2}{5^3} - \frac{z^3}{5^4} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{5^{n+1}} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{6} \left(\left(1 + \frac{1}{5} \right) + \left(1 - \frac{1}{5^2} \right) z + \left(1 + \frac{1}{5^3} \right) z^2 + \dots + \left(1 + (-1)^n \frac{1}{5^{n+1}} \right) z^n + \dots \right) \end{aligned}$$

Найдем области сходимости:

$$|z| < 1 \text{ и } |z| < 5$$

Оба ряда сходятся в круге $|z| < 1$ и представляют правильную часть ряда Лорана.

Разложение в (2) области $1 < |z| < 5$, преобразуем функцию

$$f(z) = \frac{1}{6(z-1)} - \frac{1}{6(z+5)} = \frac{1}{6z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} - \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{5}} =$$

$$= \frac{1}{6z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots \right) - \frac{1}{30} \left(1 - \frac{z}{5} + \frac{z^2}{25} - \frac{z^3}{125} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{5^n} + \dots \right)$$

$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{6} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots + \frac{1}{z^{n+1}} + \dots \right)}_{\text{главная часть}} - \underbrace{\frac{1}{30} \left(1 - \frac{z}{5} + \frac{z^2}{25} - \frac{z^3}{125} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{5^n} + \dots \right)}_{\text{правильная часть}}$$

Найдем области сходимости:

для главной части $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$ или $1 < |z|$

для правильной части $\left| \frac{z}{5} \right| < 1$ или $|z| < 5$

весь ряд сходится в (2) области $1 < |z| < 5$

Разложение в (3) области $5 < |z|$

преобразуем функцию

$$f(z) = \frac{1}{6(z-1)} - \frac{1}{6(z+5)} = \frac{1}{6z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} - \frac{1}{6z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5}{z}} =$$

$$= \frac{1}{6z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots \right) - \frac{1}{6z} \left(1 - \frac{5}{z} + \frac{5^2}{z^2} - \frac{5^3}{z^3} + \dots + (-1)^n \frac{5^n}{z^n} + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{z} - \frac{5}{z^2} + \frac{5^2}{z^3} - \frac{5^3}{z^4} + \dots + (-1)^n \frac{5^n}{z^{n+1}} + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1+5}{z^2} + \frac{1-5^2}{z^3} - \frac{1+5^3}{z^4} + \dots + \frac{1+(-1)^n 5^n}{z^{n+1}} + \dots \right)$$

В разложении присутствует только главная часть ряда Лорана.

Найдем области сходимости:

$$\left| \frac{1}{z} \right| < 1 \text{ или } 1 < |z|$$

$$\left| \frac{5}{z} \right| < 1 \text{ или } |z| > 5$$

Оба ряда сходятся вне круга $|z| > 5$ и представляют главную часть ряда Лорана.

Ответ:

В области (1) $|z| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4z - 5 + z^2} = \\ &= -\frac{1}{6} \underbrace{\left(\left(1 + \frac{1}{5}\right) + \left(1 - \frac{1}{5^2}\right)z + \left(1 + \frac{1}{5^3}\right)z^2 + \dots + \left(1 + (-1)^n \frac{1}{5^{n+1}}\right)z^n + \dots \right)}_{\text{правильная часть}} \end{aligned}$$

в области(2) $1 < |z| < 5$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4z - 5 + z^2} = \\ &= \underbrace{\frac{1}{6} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots + \frac{1}{z^{n+1}} + \dots \right)}_{\text{главная часть}} - \underbrace{\frac{1}{30} \left(1 - \frac{z}{5} + \frac{z^2}{25} - \frac{z^3}{125} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{5^n} + \dots \right)}_{\text{правильная часть}} \end{aligned}$$

в области(3) $|z| > 5$

$$f(z) = \frac{1}{4z - 5 + z^2} = \underbrace{\frac{1}{6} \left(\frac{1+5}{z^2} + \frac{1-5^2}{z^3} - \frac{1+5^3}{z^4} + \dots + \frac{1+(-1)^n 5^n}{z^{n+1}} + \dots \right)}_{\text{главная часть}}$$

2. Найти особые точки данной функции, определить их тип. Найти вычеты в особых точках.

$$a) f(z) = \frac{\sin(z-3)}{(z-3)^2(z+1)}$$

Решение: особыми точками являются точки $z_1 = 3$, $z_2 = -1$, в этих точках функция не определена, нужно определить тип особых точек.

Точка $z_1 = 3$ обращает в нуль не только знаменатель, но и числитель. Точка $z_1 = 3$ является нулем порядка $m = 1$ для числителя и порядка

$n = 2$ для знаменателя, учитывая, что $n > m$ определим порядок полюса, он равен $n - m = 2 - 1 = 1$, т.е. точка $z_1 = 3$ является полюсом первого порядка- $P(1)$ или простым полюсом.

$$\operatorname{res} f(3) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{\sin(z-3) \cdot (z-3)}{(z-3)^2 \cdot (z+1)} = \frac{1}{4}$$

Точка $z_2 = -1$ является нулем $n = 1$ только для знаменателя, т.е. точка $z_2 = -1$ является полюсом первого порядка- $P(1)$ или простым полюсом.

$$\operatorname{res} f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin(z-3) \cdot (z+1)}{(z-3)^2 \cdot (z+1)} = \frac{-\sin 4}{16}$$

Ответ: точка $z_1 = 3$ является простым полюсом, $\operatorname{res} f(3) = \frac{1}{4}$

точка $z_2 = -1$ является простым полюсом, $\operatorname{res} f(-1) = \frac{-\sin 4}{16}$.

2. Найти особые точки данной функции, определить их тип. Найти вычеты в особых точках.

$$б) f(z) = (z+2)\cos\left(\frac{4}{z+2}\right)$$

Решение: Особой точкой является точка $z = -2$. Аргумент косинуса величина обратная

$(z + 2)$, поэтому, скорее всего это существенно особая точка. Разложим функцию в ряд Лорана по степеням $(z + 2)$. Используем разложение косинуса (которое знаем наизусть)

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\begin{aligned} f(z) &= (z + 2) \cos\left(\frac{4}{z + 2}\right) = \\ &= (z + 2) \left(1 - \frac{4^2}{2! (z + 2)^2} + \frac{4^4}{4! (z + 2)^4} - \frac{4^6}{6! (z + 2)^6} + \dots + \frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)! (z + 2)^{2n}} + \dots \right) = \\ &= (z + 2) - \frac{4^2}{2! (z + 2)^1} + \frac{4^4}{4! (z + 2)^3} - \frac{4^6}{6! (z + 2)^5} + \dots + \frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)! (z + 2)^{2n-1}} + \dots = \\ &= \underbrace{(z + 2)}_{\text{правильная часть}} + \underbrace{\frac{-4^2}{2! (z + 2)^1} + \frac{4^4}{4! (z + 2)^3} - \frac{4^6}{6! (z + 2)^5} + \dots + \frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)! (z + 2)^{2n-1}} + \dots}_{\text{главная часть}} \end{aligned}$$

Разложение справедливо для любой точки $z \neq -2$

$$\operatorname{res} f(-2) = c_{-1} = \frac{-4^2}{2!} = -8$$

Ответ: точка $z_1 = 3$ является существенно особой точкой, $\operatorname{res} f(-2) = -8$.

3. Вычислить а) $L_1: |z - 1| = 1$

$$\int_{L_1} \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right) dz}{\cos z}$$

Решение: подынтегральная функции $f(z) = \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos z}$ имеет особые точки, которые

находятся из условия $\cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, внутри окружности

$|z - 1| = 1$ находится только одна особая точка $z = \frac{\pi}{2}$. Знаменатель функции $f(z)$

в точке $z = \frac{\pi}{2}$ имеет нуль первого порядка, числитель также имеет нуль первого порядка, следовательно, $z = \frac{\pi}{2}$ устранимая особая точка, $\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Используя, основную теорему о вычетах, найдем интеграл

$$\int_{L_1} \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right) dz}{\cos z} = 2\pi i \cdot \operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i \cdot 0 = 0$$

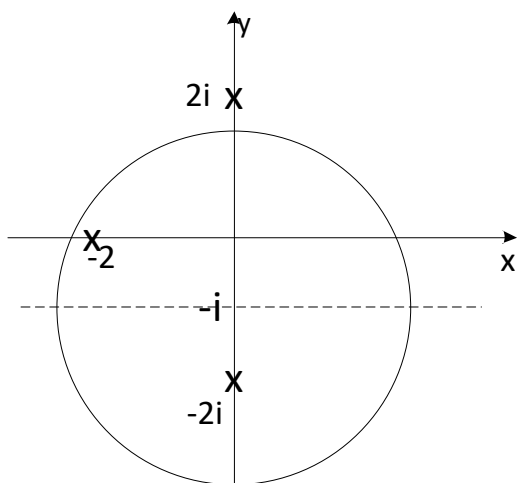
Ответ: $\int_{L_1} \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right) dz}{\cos z} = 0$

3. Вычислить б) $L_2: |z + i| = 2.5$

$$\int_{L_2} \frac{(e^{z+2} - 1) dz}{(z + 2)(z^2 + 4)}$$

Решение: найдем особые точки подынтегральной функции $f(z) = \frac{(e^{z+2} - 1)}{(z + 2)(z^2 + 4)}$.

Это точки $z_1 = -2$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 2i$.



Внутри окружности $|z + i| = 2.5$ находятся точки $z_1 = -2$, $z_2 = -2i$, точка $z_3 = 2i$ находится вне окружности, поэтому по основной теореме о вычетах

$$\int_{L_2} \frac{(e^{z+2} - 1) dz}{(z + 2)(z^2 + 4)} = 2\pi i \cdot (\operatorname{res} f(-2) + \operatorname{res} f(-2i))$$

точка $z_1 = -2$ устранимая особая точка, $\Rightarrow \operatorname{res} f(-2) = 0$.

$z_2 = -2i$ является простым полюсом,

$$\begin{aligned}\Rightarrow \operatorname{res} f(-2i) &= \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{(e^{z+2} - 1) \cdot (z + 2i)}{(z + 2)(z + 2i)(z - 2i)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{(e^{z+2} - 1)}{(z + 2)(z - 2i)} = \frac{(e^{-2i+2} - 1)}{(-2i + 2)(-2i - 2i)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{L_2} \frac{(e^{z+2} - 1)dz}{(z + 2)(z^2 + 4)} = 2\pi i \cdot \left(0 + \frac{(e^{-2i+2} - 1)}{(-2i + 2)(-4i)} \right) = \frac{-\pi}{2} \cdot \frac{(e^{-2i+2} - 1)}{(-2i + 2)}$$

Ответ: $\int_{L_2} \frac{(e^{z+2}-1)dz}{(z+2)(z^2+4)} = \frac{-\pi}{2} \cdot \frac{(e^{-2i+2}-1)}{(-2i+2)}$

4. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 25)}$$

Решение: Введем функцию $F(z) = \frac{1}{(z^2+9)(z^2+25)}$, имеющую четыре особых точек

$z_1 = 3i, z_2 = -3i, z_3 = 5i, z_4 = -5i$. В верхней полуплоскости находится две точки $z_1 = 3i, z_3 = 5i$, являющиеся простыми полюсами.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \operatorname{res} f(3i) &= \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{(z - 3i)}{(z + 5i)(z - 5i)(z + 3i)(z - 3i)} = \\ &= \frac{1}{6i} \cdot \frac{1}{(-9 + 25)} = \frac{1}{96i}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{res} f(5i) = \lim_{z \rightarrow 5i} \frac{(z - 5i)}{(z + 5i)(z - 5i)(z + 3i)(z - 3i)} =$$

$$= \frac{1}{10i} \cdot \frac{1}{(9-25)} = -\frac{1}{160i}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+25)} = 2\pi i \cdot (\operatorname{res} f(5i) + \operatorname{res} f(3i)) = 2\pi i \left(\frac{1}{96i} - \frac{1}{160i} \right) = \frac{\pi}{120}$$

Ответ: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+25)} = \frac{\pi}{120}$

