Данные задачи представлены с решениями и ответами.

Вариант 1

1. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3}{5x^2 + 3x + 2}$$

2. Напишите на языке " $\varepsilon - \delta$ "

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -\infty$$

Вычислите пределы

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 - 1} - 2}{3x^2 - x - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 4}{\sqrt{x^2 + 25} - 5}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x})$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 2}{1 + 3x} \right)^{3x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (3^x + x)^{\frac{1}{x}}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(7x^2) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(1 + 3x) \cdot (e^{3x} - 1)^2 \cdot \arcsin(5x)}$$

9. Найдите C и K , чтобы функции $C\alpha^k(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$ были эквивалентны

$$\alpha(x) = x; \beta(x) = 7tg^3(8x)$$

10. Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+3)! - (n+1)!}$$

Ответы и решения

1. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3}{5x^2 + 3x + 2}$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3}{5x^2 + 3x + 2} = \left| \begin{array}{l} \text{подставляем вместо } x \\ \text{значение к которому} \\ \text{он стремится} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0^2 - 3}{5 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{числитель и знаменатель} \\ \text{равны константам,} \\ \text{неопределенность отсутствует} \end{array} \right| = \frac{-3}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{-3}{2}$$

2. Написать на языке " $\varepsilon - \delta$ "

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -\infty$$

Решение:

Первый вариант

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : 2 - \delta < x < 2 \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$$

Второй вариант

Учитывая, что функция стремится к минус бесконечности и " ε " величина сколь возможно большая, решение можно представить в следующем виде

$$\left(\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -\infty \right) \Leftrightarrow (\forall E > 0 \exists \delta(E) > 0 : -\delta < x - 2 < 0 \Rightarrow f(x) < -E)$$

3. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 - 1} - 2}{3x^2 - x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 - 1} - 2}{3x^2 - x - 1} = \left[\begin{array}{l} \text{подставляем вместо } x \\ \text{значение к которому} \\ \text{он стремится,} \\ \text{чтобы определить} \\ \text{тип неопределенности} \\ \text{или вычислить предел} \end{array} \right] = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Для раскрытия неопределенности} \\ \text{разделим числитель и знаменатель} \\ \text{на } x^2, \text{ чтобы избавиться от} \\ \text{бесконечности,} \\ \text{например в числителе} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^4 - 1}}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 - \frac{1}{x^4}} - \frac{2}{x^2}}{3 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3}$$

Числитель и знаменатель можем разделить на одно и то же выражение, дробь при этом не меняется. Чтобы избавиться от бесконечности, например, в знаменателе, разделим числитель и знаменатель на x^2 . Учитывая, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

найдем ответ.

Ответ: $\frac{2}{3}$

4. Найдите предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 4}{\sqrt{x^2 + 25} - 5} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{Умножим числитель и знаменатель} \\ \text{на выражения сопряженные} \\ \text{числителю и знаменателю} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 16} - 4)(\sqrt{x^2 + 16} + 4)(\sqrt{x^2 + 25} + 5)}{(\sqrt{x^2 + 25} - 5)(\sqrt{x^2 + 16} + 4)(\sqrt{x^2 + 25} + 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 16 - 16)(\sqrt{x^2 + 25} + 5)}{(x^2 + 25 - 25)(\sqrt{x^2 + 16} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{(\sqrt{x^2 + 25} + 5)}{(\sqrt{x^2 + 16} + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 25} + 5)}{(\sqrt{x^2 + 16} + 4)} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5}{4}$

5. Вычислите предел

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x}) &= (\infty - \infty) = \left| \begin{array}{l} \text{Для раскрытия неопределенности} \\ \text{умножим и разделим} \\ \text{на сопряженное выражение} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x})(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x})}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x})} = \left| \begin{array}{l} \text{в числителе} \\ \text{разность квадратов} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - (\sqrt{x^2 - 2x})^2}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1 - (x^2 - 2x)}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x})} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x})} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left[\begin{array}{c} \text{Для раскрытия неопределенности} \\ \text{разделим числитель и знаменатель} \\ \text{на } x, \text{ чтобы избавиться от} \\ \text{бесконечности,} \\ \text{например, в числителе} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 0}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \frac{3}{2}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$

6. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 2}{1 + 3x} \right)^{3x}$$

Определим, к чему стремится выражение внутри скобки

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 2}{1 + 3x} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{\frac{1}{x} + 3} = 1$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 2}{1 + 3x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 2}{1 + 3x} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} 3x} = (1^\infty) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{Для раскрытия неопределенности} \\ \text{такого типа используем} \\ \text{2ой замечательный предел} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x + 2}{1 + 3x} - 1 \right)^{3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x + 2 - 3x - 1}{1 + 3x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1 + 3x} \right)^{3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{1 + 3x} \right)^{3x+1} \right]^{\frac{3x}{3x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{1+3x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{\frac{1}{x} + 3} \right)} = e^1$$

Ответ: e^1

7. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3^x + x)^{\frac{1}{x}}$$

Определим, к чему стремится выражение внутри скобки

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3^x + x) = 1$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (3^x + x)^{\frac{1}{x}} = (1^\infty) &= \left| \begin{array}{l} \text{Для раскрытия неопределенности} \\ \text{такого типа используем} \\ \text{2ой замечательный предел} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3^x \left(1 + \frac{x}{3^x} \right) \right)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 3^{x \cdot \frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{x}{3^x} \right)^{\frac{1}{x}} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{x}{3^x} \right)^{\frac{3^x}{x}} \right]^{\frac{x \cdot 1}{3^x \cdot x}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{Выражение в} \\ \text{квадратных скобках} \\ \text{стремится к } e, \\ \text{2ой замечательный предел,} \end{array} \right| = 3e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3^x}} = 3e \end{aligned}$$

Ответ: $3e$

8. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(7x^2) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(1+3x) \cdot (e^{3x} - 1)^2 \cdot \arcsin(5x)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(7x^2) \cdot \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(1+3x) \cdot (e^{3x} - 1)^2 \cdot \arcsin(5x)} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{Предел отношения} \\ \text{бесконечно малых функций} \\ \text{равен пределу отношения} \\ \text{эквивалентных функций} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^2 \cdot \frac{x^2}{4}}{3x \cdot (3x)^2 \cdot 5x} = \frac{7}{4 \cdot 27 \cdot 5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = \frac{7}{540} \end{aligned}$$

При замене бесконечно малых функций на эквивалентные функции помним, что

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{arctg} 7x^2 \sim 7x^2 \text{ при } x \rightarrow 0 \\ \sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2} \text{ при } x \rightarrow 0 \\ \ln(1 + 3x) \sim 3x \text{ при } x \rightarrow 0 \\ e^{3x} - 1 \sim 3x \text{ при } x \rightarrow 0 \\ \operatorname{arcsin} 5x \sim 5x \text{ при } x \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{это нужно знать наизусть!!!}$$

Ответ: $\frac{7}{540}$

9. Найдите C и k , чтобы функции $C\alpha^k(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$ были эквивалентны

$$\alpha(x) = x; \beta(x) = 7 \operatorname{tg}^3(8x)$$

Бесконечно малые $C\alpha^k(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными, если предел их отношения равен 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{C\alpha^k(x)}{\beta(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Cx^k}{7 \cdot \operatorname{tg}^3 8x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Cx^k}{7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot x^3} = \frac{C}{3584} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x^k}{\lim_{x \rightarrow 0} x^3} = 1,$$

предел равен 1, если $C = 3584$ и $k = 3$

Ответ: $C = 3584$ и $k = 3$

10. Вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+3)! - (n+1)!}$$

Учитывая, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = (n-1)! \cdot n$

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1) = (n-1)! \cdot n \cdot (n+1),$$

получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+3)! - (n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+2) - (n+1)!}{(n+1)!(n+2)(n+3) - (n+1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+2-1)}{(n+1)!((n+2)(n+3)-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+5n+5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \end{aligned}$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{для раскрытия неопределенности} \\ \text{разделим числитель и знаменатель} \\ \text{на } n^2, \text{ чтобы избавиться от} \\ \text{бесконечности в знаменателе} \end{array} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{5}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

Ответ:0