УЧИМСЯ ВЫЧИСЛЯТЬ ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

При вычислении пределов возникают ситуации (неопределенности) требующие преобразования функций, стоящих под знаком предела. Основными видов неопределенностей являются следующие неопределенности:

$$\frac{\infty}{\infty}\ ;\ \frac{0}{0}\ ;\ (\infty-\infty);\ 0\cdot\infty;\ 1^{\infty};\ 0^{0};\infty^{0}.$$

Для классификации типов пределов и способов раскрытия неопределённостей предлагается использовать таблицу, содержащую некоторые простейшие приемы раскрытия основных типов неопределенностей.

Таблица 1. Классификация типов пределов и способов раскрытия неопределённостей

№	Вид (тип) неопределенности	Тип функции	Способ раскрытия неопределенности	Пример
1	$\frac{\infty}{\infty}$	Рациональная или иррациональная функция	1. Вынесение максимальной степени числителя и максимальной степени знаменателя и для дальнейшего упрощения выражения и избавления от бесконечности либо в числителе, либо в знаменателе	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^9+3x^5-1}}{x^2+2x-6}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^9}}}{x^2\cdot\left(1+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^9}}}{1+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}}=$ $=\left(\frac{\infty}{1}\right)=\infty$

1	$\frac{\infty}{\infty}$	Рацио-нальная функция	2.Правило Лопиталя, если выполнены условия теоремы Лопиталя.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{3x}}{4x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)= =\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}}{4}=\left(\frac{\infty}{4}\right)=\infty$
		Иррацио-нальная функция	3.Правило Лопиталя приводит к трудоемким вычислениям	
2	$\frac{0}{0}$	Рацио-нальная функция	1.Разложение на множители числителя и знаменателя и дальнейшее сокращение дроби.	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+x-6}\equiv\left(\frac{0}{0}\right)= =\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+3)}=\frac{4}{5}$
		Иррацио-нальная функция	2.Умножение на сопряженное к числителю или знаменателю, либо неполный квадрат суммы, для избавления от иррациональности и снятия неопределенности.	$\lim\limits_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}= =\lim\limits_{x\to7}\frac{\left(2-\sqrt{x-3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{x-3}\right)}{(x^2-49)\cdot\left(2+\sqrt{x-3}\right)}= =\lim\limits_{x\to7}\frac{4-(x-3)}{(x^2-49)\cdot\left(2+\sqrt{x-3}\right)}= =\lim\limits_{x\to7}\frac{7-x}{(x^2-49)\cdot\left(2+\sqrt{x-3}\right)}= =\lim\limits_{x\to7}\frac{-1}{(x+7)\cdot\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\frac{1}{56}$
		общего вида	3.Упрощение выражений в числителе и знаменателе, с использованием таблицы эквивалентностей.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg^4(7x)\cdot(x-3)^3}{sin^2(5x)\cdot(e^{9x}-1)^2}\equiv\left(\frac{0}{0}\right)= =\lim\limits_{x\to2}\frac{(7x)^4\cdot(x-3)^3}{(5x)^2\cdot(9x)^2}= =\lim\limits_{x\to2}\frac{(7x)^4\cdot(x-3)^3}{(5x)^2\cdot(9x)^2}= =\frac{7^4\cdot(-3)^3}{5^2\cdot9^2}==\frac{-7^4}{75}$
		общего вида	4. Правило Лопиталя, если выполнены условия теоремы Лопиталя.	$\lim\limits_{x\to0}\frac{sinx+arcsinx}{x^2+x}= =\lim\limits_{x\to0}\frac{cosx+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2x+1}=1$

Продолжение табл. 1.

3	$\infty - \infty$	Иррацио-нальная функция	1.Умножение и деление на сопряженное, либо неполный квадрат суммы и преобразование к виду дроби с неопределенностью $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2-4x-3}\right) =$ $= (\infty - \infty) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+3-(x^2-4x-3)}{\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2-4x-3}} =$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x+6}{\sqrt{x^2+5x+3}+\sqrt{x^2-4x-3}} =$ $= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{9+\frac{6}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \frac{9}{2}$
		Рацио-нальная функция	2.Приведение к общему знаменателю и получению дроби, чаще всего с неопределенностью типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{sinx}-\frac{1}{tgx}\right) = (\infty - \infty) =$ $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{sinx} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2x} = 0$
4	$0\cdot\infty$	общего вида	Представлением одного из множителя функции в виде дроби $f(x)\cdot g(x) =$ $= \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} =$ $= f(x)\cdot\frac{1}{\frac{1}{g(x)}} =$ $= \frac{1}{\frac{1}{f(x)}}\cdot g(x)$, что приводит к неопределенностям типа $\frac{\infty}{\infty}$ и $\frac{0}{0}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot sin\frac{1}{x}\right) = (\infty\cdot 0) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$

Окончание табл. 1.

5	1^∞	общего вида	Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x-7}=(1^\infty)=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot(2x-7)\cdot\frac{3}{x}}=$ $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2x-7)}{x}}=e^6$
6	1^∞ или 0^0 или ∞^0	общего вида	используя свойства логарифма, преобразуем исходную функцию $f(x)^{g(x)}$ к виду $e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$, что приводит к неопределенности типа $0\cdot\infty$ в степени, приводит к неопределенности типа $e^{0\cdot\infty}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(cos\frac{3}{x}\right)^x=(1^\infty)=$ $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(cos\frac{3}{x}\right)\right)}=\left(e^{(0\cdot\infty)}\right)=$ $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(1+\left(cos\frac{3}{x}-1\right)\right)\right)}=$ $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\left(cos\frac{3}{x}-1\right)\right)}=$ $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\left(-\frac{9}{2x^2}\right)\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{9}{2x}\right)}=$ $=1$
7	$\frac{\infty}{0}$	общего вида	**НЕ ЯВЛЯЕТСЯ** неопределенностью, предел стремится к ∞, т.к. $\frac{f(x)}{g(x)}=$ $=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\to\infty\cdot\infty=\infty$ при условии $g(x)\to 0$ и $f(x)\to\infty$	$\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{ln(x-3)}{x^2-2x-3}=\left(\frac{\infty}{0}\right)=\infty$
8	$\frac{0}{\infty}$	общего вида	**НЕ ЯВЛЯЕТСЯ** неопределенностью, предел стремится к 0, т.к. $\frac{f(x)}{g(x)}=$ $=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\to 0\cdot 0=0$ при условии $g(x)\to\infty$ и $f(x)\to 0$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3+5}\equiv\left(\frac{0}{\infty}\right)=0$

В таблице приводится не только вид (тип) неопределенности, но и те случаи, которые часто ошибочно принимаются за неопределенности. Представленная таблица позволяет сконцентрировать и обобщить основные приемы пределов функций. Надеемся, что наша таблица поможет лучше освоить азы курса математического анализа.

Литература:

1.Абанина Т.И. Математика Справочник для студентов вузов, техникумов, колледжей. Ростов на Дону, Феникс, 2014, 377с.

2. Аксененкова И.М. и др. Математический анализ. 1 семестр Учебное пособие. Для студентов очной формы обучения институтов РТС,ИТ,ФТИ. МИРЭА Москва., 2017, 129с.

3. Игонина Т.Р., Параскевопуло О.Р. Один из способов обучения студентов классификации особых точек. Научно-техническая конференция МИРЭА. 2017.