МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математический анализ

4 семестр

Учебное пособие

Для студентов очной формы обучения
институтов РТС и ФТИ

Москва
МИРЭА
2017

Составители: И.М.Аксененкова, Т.Р.Игонина, О.А.Малыгина, А.В.Татаринцев, Н.С.Чекалкин

Редактор Н.С.Чекалкин

Пособие содержит теоретический материал, практические задания и типовой расчет по математическому анализу (4 семестр) по теории функции комплексного переменного. В пособии приведены типовые варианты контрольных работ и экзаменационных билетов по курсу.

Изложение теоретической части соответствует программе курса математического анализа (4 семестр), который читается преподавателями кафедры высшей математики 2 для студентов очной формы институтов РТС и ФТИ.

Рецензенты: Т.Н.Бобылева,
В.Ю. Приходько

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

IV семестр

ВВЕДЕНИЕ

Основные темы по курсу математического анализа IV семестра (дневное отделение)

1. Комплексные числа, действия над ними. Примеры. Понятие функции комплексного переменного. Основные элементарные функции.

2. Предел, непрерывность и дифференцируемость функции комплексного переменного. Понятие аналитической функции. Условия Коши-Римана. Понятие гармонической функции, ее связь с аналитичностью.

3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения, примеры. Определение интеграла функции комплексного переменного вдоль кусочно-гладкой кривой, свойства. Теоремы Коши для односвязной и многосвязной области. Интегральная формула Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.

4. Степенной ряд, область его сходимости. Ряд Тейлора аналитической функции, основные разложения. Ряд Лорана аналитической функции. Примеры разложения в ряд Лорана.

5. Изолированная особая точка (и.о.т.) комплексной функции. Классификация и.о.т. по главной части ряда Лорана и по пределу. Нуль регулярной функции, его кратность. Связь полюса с нулем обратной функции.

6. Вычет аналитической функции в особой точке. Основная тео-

рема о вычетах Определение вычета по ряду Лорана. Вычисление вычета в устранимой особой точке, в простом и кратном полюсе, в существенно особой точке. Понятие о вычете в бесконечности.

7. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов. Вычисление несобственных интегралов по прямой и полупрямой. Лемма Жордана. Логарифмический вычет, теорема о логарифмическом вычете. Принцип аргумента. Теорема Руше и ее применение.

8. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Теоремы о непрерывности, о дифференцируемости и об интегрировании по параметру. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость.Теоремы о непрерывности, о дифференцируемости и об интегрировании по параметру.

9. Гамма-функция вещественного аргумента, её непрерывность и дифференцируемость на положительной полуоси. Формулы приведения и дополнения для гамма-функции, их следствия. Распространение гамма-функции на отрицательную полуось. Бета-функция, ее выражение через гамма-функцию. Применение бета-функции для вычисления тригонометрических интегралов.

10. Интегральные преобразования. Ядро преобразования. Прямое и обратное преобразование Фурье в комплексной форме. Свойства преобразования Фурье. Прямое и обратное преобразование Фурье в действительной форме. Преобразование Фурье для четных и нечетных функций. Вычисление с помощью вычетов.

11. Преобразование Лапласа. Определение оригинала и изображения. Свойства преобразования Лапласа. Вычисление оригинала с помощью вычетов. Оригинал дробно-рационального изображения. Связь преобразования Лапласа и Фурье.

Данный материал излагается студентам на лекциях и практических занятиях. От студента требуется успешное овладение материалом по указанным темам, т. е. необходимо знать определения понятий, формулировки и доказательства основных теорем курса. Студент также должен продемонстрировать умение решать задачи данного курса.

В течение семестра по курсу математического анализа проводятся две контрольные работы и выполняется типовой расчет. Контрольная работа №1 проводится примерно на 6-й неделе обучения, контрольная работа №2 проводится примерно на 11-й неделе, а сдача типового расчета – в конце семестра.

Контрольная работа №1

Тема. «Функции комплексного переменного».
Цель. Проверить умения работать с комплексными числами, устанавливать аналитичность функции, восстанавливать аналитическую функцию по ее действительной и мнимой части, решать уравнения, строить конформные отображения.
Содержание. В контрольную работу входят задачи, идентичные задачам № 1 – 7.

Контрольная работа №2

Тема. «Изолированные особые точки. Вычеты».
Цель. Проверить усвоение основных приемов разложения функций в ряды Тейлора и Лорана, исследования характера особых точек, вычисления вычетов и интегралов по теореме о вычетах.
Содержание. В контрольную работу №2 входят задачи № 8 – 11.

Типовой расчет

Тема. «Приложения вычетов. Гамма- и Бета- функции».
Цель. Проверить умение применять вычеты для вычисления несобственных интегралов, для нахождения оригинала по его изображению, использовать теорему Руше при нахождении числа корней уравнения в указанной области, вычислять интегралы с помощью

Гамма- и Бета- функции.
Содержание. В типовой расчет входят задачи № 12 – 15. Преподаватель может включить в типовой расчет задачи № 8 – 11.

По итогам обучения проводится *экзамен (зачет)*.

1 Примерный вариант экзаменационного билета

I часть

1. Вычислить: $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$.
2. Решить уравнение: $sinz = 2$.
3. Проверить, является ли функция $f(z) = z \cdot \mathrm{Re}z$ аналитической.

II часть

1. Указать особые точки функции
$$f(z) = \frac{cosz}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)(z^2 - 4)},$$
определить их тип и вычислить вычеты в этих точках.
2. Вычислить: $\int_{|z|=1} z^3\, e^{\frac{5}{z}} dz$.

III часть

1. Вычислить: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)}$.
2. Вычислить: $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$.
3. С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения
$$2z^5 - 8z^4 + z^3 + 2z^2 + z - 1 = 0$$
в области $1 < |z| < 2$.

2 Теоретические вопросы к экзамену (зачету)

1. Комплексные числа и действия над ними. Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Корни -ой степени из комплексного числа.
2. Определение регулярной аналитической функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.
3. Линейная функция комплексного переменного. Ее аналитичность. Отображение, которое она осуществляет.
4. Степенная функция комплексного переменного. Ее аналитичность. Область однолистности. Отображение, которое она осуществляет.
5. Показательная функция комплексного переменного. Ее аналитичность. Период. Область однородности. Отображение, которое она осуществляет.
6. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного. Их аналитичность. Периоды.
7. Логарифм комплексного переменного. Аналитичность. Многозначность отображения, которое он осуществляет.
8. Общая степенная функция комплексного переменного. Аналитичность. Многозначность отображения, которое она осуществляет.
9. Гармоничные функции. Их связь с аналитическими функциями комплексного переменного.
10. Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции. Понятие конформного отображения.
11. Определение интеграла от функции комплексного переменного, его связь с криволинейными интегралами. Основные свойства.

12. Интеграл от аналитической функции, его независимость от пути интегрирования. Формула Ньютона-Лейбница.
13. Интегральная теорема Коши для односвязной и многосвязной областей.
14. Интегральная формула Коши для аналитической функции.
15. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций. Интегральная формула Коши для производных аналитической функции.
16. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора. Область сходимости. Формулы для коэффициентов.
17. Разложение функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана. Формулы для коэффициентов.
18. Изолированные особые точки аналитической функции и их классификация. Примеры.
19. Устранимая особая точка. Ряд Лорана и поведение функции в окрестности этой точки.
20. Полюс $n-$ го порядка. Ряд Лорана и поведение функции в окрестности этой точки.
21. Существенно особая точка. Ряд Лорана и поведение функции в окрестности этой точки.
22. Нули аналитической функции. Порядок нуля. Связь между нулем и полюсом.
23. Вычет аналитической функции в точке. Его связь с рядом Лорана. Основная теорема о вычетах.
24. Формулы для вычисления вычетов в простом и кратном полюсе.
25. Стереографическая проекция. Бесконечно удаленная точка. Ряд Лорана в окрестности бесконечности. Классификация

особенностей в бесконечности.

26. Вычет в бесконечно удаленной точке. Его связь с рядом Лорана. Вторая теорема о вычетах.

27. Приложение теории вычетов к вычислению интегралов по вещественной прямой от рациональных функций.

28. Лемма Жордана. Вычисление несобственных интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)dx$.

29. Логарифмический вычет. Связь числа нулей и полюсов функции внутри замкнутого контура с интегралом по этому контуру.

30. Принцип аргумента. Теорема Руше.

31. Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность по параметру.

32. Интегралы, зависящие от параметра. Интегрирование и дифференцирование по параметру.

33. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Определение равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости.

34. Равномерная непрерывность несобственного интеграла по параметру. Примеры.

35. Интегрирование несобственного интеграла по параметру. Примеры.

36. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру. Примеры.

37. Гамма-функция и ее свойства: формула понижения, связь с факториалом, формула дополнения.

38. Аналитическое продолжение гамма-функции в комплексной плоскости. Ее значения на отрицательной полуоси. Свойства

$\Gamma(z)$.

39. Бета-функция. Ее связь с гамма-функцией. Применение к вычислению интегралов.
40. Определение преобразования Лапласа. Его аналитичность.
41. Определение преобразования Лапласа. Его обращение с помощью вычетов.
42. Степенные ряды. Теорема Абеля.
43. Радиус и круг сходимости степенного ряда. Вычисление радиуса сходимости.
44. Свойства степенных рядов. Сформулировать условия непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости степенного ряда в заданной области.
45. Преобразование Фурье функций, заданных на прямой, и его свойства.
46. Тригонометрические ряды Фурье: вещественная и комплексная формы записи, ряды Фурье для четных и нечетных функций, разложение функций на полупериоде в ряды по синусам и косинусам.
47. Тригонометрические ряды Фурье: признаки сходимости и равномерной сходимости, теоремы единственности.
48. Свойства коэффициентов ряда Фурье.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Ч. 1: Учебник для бакалавров / - Люберцы: Юрайт, 2016.

2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Ч. 2: Учебник для бакалавров / - Люберцы: Юрайт, 2016.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Том 1 – М.: Книга по Требованию, 2013.

4. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I, 2. — 6-е изд, дополн.— М.: МЦНМО, 2012.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. М.: Физматлит. – 2014.

6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика: Аналитическая геометрия, векторная алгебра, линейная алгебра, дифференциальное исчисление. Т.1. - URSS. - 2014.

7. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика: Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, дифференциальная геометрия.Т.2. - URSS. - 2017.

8. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости. Т.3. - URSS. – 2017.

9. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика: Кратные и криволинейные интегралы, векторный анализ, функции комплексного переменного, дифференциальные уравнения с частными производными. Т.4. Изд. 4. - URSS. – 2017.

10. Аксененкова И.М., Малыгина О.А., Шухов А.Г.,

Чекалкин Н.С. Ряды. Интеграл Фурье и преобразование Фурье. Приложения. М.: МИРЭА. - 2015.

Дополнительная литература:

11. Аксененкова И.М., Игонина Т.Р., Малыгина О.А. и др. Математический анализ. 1 семестр. Учебно-методическое пособие для студентов факультетов РТС, ИТ, Электроники. – М.: МИРЭА.- 2013.

12. Аксененкова И.М., Игонина Т.Р., Малыгина О.А. и др. Математический анализ. 2 семестр. Учебно-методическое пособие для студентов факультетов РТС и Электроники. – М.: МИРЭА.- 2011.

13. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Дрофа, 2004.

14. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Лань, 2005.

15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973.

16. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М. Наука, 1977.

3 Основные типы задач по курсу математического анализа (теория функций комплексной переменной)

Задача №1.

Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенством или системой неравенств.

№		№	
1	$1 < \|z-2\| < 3$	2	$2 < \|z+4-3i\| < 3$
3	$\begin{cases} \|z+i\| < 1 \\ \mathrm{Re}z < 0 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 0 < \mathrm{Re}z < 3 \\ -3 < \mathrm{Im}z < 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 1 < z\cdot\overline{z} < 4 \\ \mathrm{Im}\overline{z} < 0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} z\cdot\overline{z} < 9 \\ 0 < argz < \frac{\pi}{3} \end{cases}$
7	$\left\|\frac{z-2}{z+2}\right\| < 1$	8	$\left\|\frac{z+i}{z-i}\right\| > 1$
9	$\begin{cases} (z-1)(\overline{z}-1) < 1 \\ \frac{\pi}{4} < arg(z-1) < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$	10	$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) < \frac{4}{5}$
11	$\mathrm{Im}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right) > \frac{4}{5}$	12	$\|z\| < 2\mathrm{Re}z$
13	$\|z\| > 1 + \mathrm{Im}z$	14	$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) > 1$
15	$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}$	16	$\|z\| < \mathrm{Re}(1+z)$
17	$\mathrm{Re}(z^2) < 1$	18	$\mathrm{Im}\left(\overline{z}^2\right) > 2$
19	$\mathrm{Re}(z^2-\overline{z}) < 0$	20	$\mathrm{Im}(z^2+2i) > 0$
21	$z^2+\overline{z}^2 > 2$	22	$\mathrm{Im}(z^2-2\overline{z}) > 2$

23	$\lvert z-2\rvert < \lvert 1-\bar{z}\rvert$	24	$\lvert z+2\rvert > \lvert \bar{z}-i\rvert$
25	$\frac{1}{4} < \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}$	26	$\frac{1}{6} < \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) - \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) < \frac{1}{4}$
27	$\lvert z-1\rvert + \lvert z+1\rvert < 8$	28	$4 < \lvert z-i\rvert + \lvert z+i\rvert < 8$
29	$0 < arg\left(\frac{i-z}{i+z}\right) < \frac{\pi}{2}$	30	$\frac{\pi}{2} < arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) < \pi$

Задача №2.

Представить данное комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.

№		№	
1	$(2-2i)^7$	2	$\left(-\sqrt{3}-3i\right)^3$
3	$\left((-1+i)\left(-3+\sqrt{3}i\right)\right)^4$	4	$\left((1+i^3)(2-2^5 i)\right)^{10}$
5	$\left(-i^7\left(2-2\sqrt{3}i\right)\right)^{11}$	6	$\left(i^{11}\left(-\sqrt{2}-\sqrt{6}i\right)\right)^{13}$
7	$\left(-\sqrt{3}-i\right)^9(1+i^{17})^7$	8	$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$
9	$\left(\frac{1-i^5}{\sqrt{3}+i}\right)^{21}$	10	$\left(\frac{-1+\sqrt{4}i}{1+i^3}\right)^8$
11	$\left(\frac{-1+i^{15}}{-\sqrt{3}-i^3}\right)^{15}$	12	$\frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^6}{(1+i)^2}$

13	$\dfrac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{15}i^7\right)^{10}}{\left(\sqrt{3}+3i^3\right)^4}$	14	$\dfrac{(7i^4+5i^{10})^{10}}{(-7i^2-7i^3)^2}$
15	$\dfrac{\left(\sqrt{17}-\sqrt{51}i^3\right)^6}{(20i^8+3i^{18})^4}$		

Задача №3.

Решить уравнения. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

№	
1	$z^3-27=0$
2	$z^3-8i=0$
3	$z^4+16=0$
4	$z^6+16z^3+64=0$
5	$z^8+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2=0$
6	$z^6+i\dfrac{2+i}{1-2i}=0$
7	$z^4-z^2+1=0$
8	$z^4+8iz^2-16=0$
9	$z^4+2z^2+4=0$
10	$z^4-2\left(1+\sqrt{3}i\right)z^2-2\left(1-\sqrt{3}i\right)=0$
11	$z^6+8\sqrt{2}(1-i)z^3-64i=0$
12	$z^6+12iz^4-48z^2-64i=0$
13	$z^3+3z^2+3z+9=0$
14	$z^3-6iz^2-12z+8i+1=0$

Задача №4.

Решить уравнение. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

№		№	
1	$e^z + 3i = 0$	2	$e^z + 5\sqrt{2} - 7 = 0$
3	$e^{2z} + 3e^z - 4 = 0$	4	$sinz = 2$
5	$cosz = -3$	6	$shz = -5$
7	$chz = 6$	8	$sinz = -3i$
9	$cosz = 2i$	10	$shz = -4i$
11	$tgz = -2i$	12	$thz = 3$
13	$sinz + cosz = 2$	14	$sinz - cosz = 3$
15	$2chz + shz = -2$		

Задача №5. Вычислить все значения заданного выражения и изобразить эти значения на комплексной плоскости.

№		№		№	
1	1^i	2	$(-1)^{\sqrt{2}}$	3	10^i
4	i^{i}	5	$(-2)^{\sqrt{3}}$	6	3^{-i}
7	$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{3i}$	8	$(-2)^{-\sqrt{2}}$	9	$(-4)^i$

10	$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{i}$	11	$(-3)^{\sqrt{2}}$	12	$(-5)^{-i}$
13	$\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$	14	$(-3)^{-\sqrt{5}}$	15	$(-2)^{\pi i}$

Задача №6.

а) Проверить, является ли функция $f(z)$ аналитичной, используя условия Коши-Римана.

№		№	
1	$f(z) = ie^{3z-i^2}$	2	$f(z) = z^2 + 5\bar{z} - 7i$
3	$f(z) = cos(iz - 1)$	4	$f(z) = cos(i\bar{z} - 1)$
5	$f(z) = sh2z + i$	6	$f(z) = \frac{i}{z} + z^2$
7	$f(z) = (iz)^2 + 5z + 3i$	8	$f(z) = \|z\|z + i$
9	$f(z) = ie^{(iz-1)}$	10	$f(z) = sin(zi + 2)$
11	$f(z) = ch3z - i$	12	$f(z) = z\bar{z} + z^2 + 4$
13	$f(z) = 3z^2 - 4z + 2i$	14	$f(z) = shiz + \mathrm{Re}z$
15	$f(z) = ie^{5z} + z$	16	$f(z) = i\|z\| - z^2$
17	$f(z) = iz \cdot \mathrm{Re}5z$	18	$f(z) = cosi(z + i)$
19	$f(z) = (z + 2) \cdot \mathrm{Im}3z$	20	$f(z) = \frac{\mathrm{Re}2z}{z}$
21	$f(z) = i(z + i)^2 - 4z$	22	$f(z) = cos(\bar{z} + i)$
23	$f(z) = ze^{-3z} - i$	24	$f(z) = \frac{4}{z} - \mathrm{Im}z$

25	$f(z) = ichiz$	26	$f(z) = (2z + 5i)\mathrm{Re}z$
27	$f(z) = cosiz - chz$	28	$f(z) = \dfrac{z}{\lvert z\rvert} i$
29	$f(z) = -iz^3 + 2i$	30	$f(z) = ie^z + (z + i)^2$
31	$f(z) = ln\lvert z\rvert + iargz$	32	$f(z) = \bar{z}e^z + iz^2$
33	$f(z) = 3(z + i)^2 + z - 2$	34	$f(z) = (z - 2i)^2 + 2z + 3$

б) Показать, что заданные функции являются гармоническими. Восстановить аналитическую функцию$f(z)$по ее действительной части$u(x,y)$или мнимой$v(x,y)$и значению$f(z_0)$.

№		
1	$u = sin\, 3xch3y$	$f(0) = 0$
2	$v = sin(2 - x)shy$	$f(2) = 1$
3	$u = cos\dfrac{y}{2}ch\dfrac{x}{2}$	$f(0) = 1$
4	$v = x^2 - y^2 + 2x$	$f(i) = -1 - i$
5	$u = e^{2x}cos(2y + 1)$	$f(-i/2) = 1$
6	$v = cos4xch4y$	$f(0) = i$
7	$v = sin(y - 2)shx$	$f(2i) = 1$
8	$v = -cos2xsh2y$	$f(0) = 0$
9	$u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$	$f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}, z \neq 0$
10	$v = e^{-y}sinx$	$f(0) = 1$

11	$u = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x} cosy$	$f(0) = 2$
12	$u = sinxch(y-2)$	$f(2i) = 0$
13	$v = -\dfrac{1}{2} sin2x \dfrac{e^{4y}-1}{e^{2y}}$	$f(0) = 1$
14	$v = sinych(x-3)$	$f(3) = 0$
15	$u = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$	$f(1) = 0, z \neq 0$
16	$v = e^{2x} sin(2y+1)$	$f(i/2) = 1$
17	$v = x^2 - y^2 + x$	$f(i) = -1 - i$
18	$v = cosxsh(y+3)$	$f(-3i) = 0$
19	$v = 10xy - 6y$	$f(1/5) = -1$
20	$v = sin2ych(2x-1)$	$f(1/2) = 0$
21	$v = e^{2y} cos2x + y$	$f(0) = i$
22	$u = cos\dfrac{x}{3} ch\dfrac{y}{3}$	$f(0) = 1$
23	$v = sin(2y+3)sh2x$	$f(0) = cos3$
24	$u = sinychx$	$f(0) = 0$
25	$v = -(e^{2y} sin2x + x)$	$f(0) = 0$
26	$u = cosxch(y-3)$	$f(3i) = 1$
27	$v = sinych(x+1)$	$f(-1) = 0$
28	$u = e^{-y} cosx + x$	$f(0) = 1$
29	$v = \dfrac{e^{2x}-1}{e^x} siny$	$f(0) = 2$

30	$u = sinxshy$	$f(0) = i$

Задача №7.

Определить область D_2 плоскости W, на которую отобразится область D_1 плоскости Z заданной функцией $\omega = f(z)$. Начертите D_1 и D_2. $\omega = az^n + b; |z| \leq R; \alpha_1 \leq argz \leq \alpha_2$.

№	n	a	b	R	α_1	α_2
1	2	$-1+i$	i	2	$-\frac{\pi}{4}$	0
2	2	$1+i$	$-i$	3	0	$\frac{\pi}{4}$
3	2	$1-i$	$1+3i$	1	0	$\frac{\pi}{2}$
4	2	$1+i\sqrt{3}$	$5i$	5	0	$\frac{\pi}{6}$
5	2	$-1+i\sqrt{3}$	$2-i$	1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
6	2	$\sqrt{3}+i$	$1+5i$	1	0	$\frac{\pi}{4}$
7	2	$-\sqrt{3}+i$	$-1-i$	2	0	$\frac{2\pi}{3}$
8	2	$-\sqrt{3}-i$	$2i$	3	0	$\frac{\pi}{6}$
9	2	$\sqrt{3}-i$	$-3i$	5	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
10	2	$2+2i$	$1+4i$	2	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
11	3	$2-2i$	$2-i$	3	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$

12	3	$-2+i$	$5i$	1	0	$\frac{\pi}{2}$
13	3	$-1-i$	$3-i$	3	0	$\frac{\pi}{4}$
14	3	$-2+2i$	$5+i$	2	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
15	2	$1+i$	$-i$	2	0	$\frac{\pi}{4}$
16	2	$-1-i$	i	3	$-\frac{\pi}{4}$	0
17	2	$-1+i$	$-1-3i$	1	$-\frac{\pi}{6}$	0
18	2	$-1-i\sqrt{3}$	$-5i$	5	$-\frac{\pi}{3}$	0
19	2	$1-i\sqrt{3}$	$-2+2i$	1	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$
20	2	$-\sqrt{3}-i$	$-1-2i$	1	$-\frac{\pi}{12}$	0
21	2	$\sqrt{3}-i$	$1+i$	2	$-\frac{\pi}{3}$	0
22	2	$\sqrt{3}+i$	$-2i$	3	$-\frac{\pi}{6}$	0
23	2	$-\sqrt{3}+i$	$3i$	5	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
24	3	$-2-2i$	$-1-2i$	2	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$
25	3	$-2+2i$	$-2+i$	3	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$

Задача №8.

Получить все разложения $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$. Если z_0 – особая точка, указать тип этой особой точки и найти $\underset{z=z_0}{res} f(z)$.

№	z_0	$f(z)$
1	-1	$\dfrac{z-1}{z(z+1)}$
2	-2	$\dfrac{z^2+2z-4}{z^2(z-2)}$
3	2	$\dfrac{2z^2-5z+4}{z(z-2)^2}$
4	1	$\dfrac{sinz}{z-1}$
5	1	$\dfrac{z+2}{z^2-1}$
6	2	$\dfrac{z}{(z+2)(z+3)}$
7	-1	$\dfrac{3z-1}{z^2-2z-3}$
8	0	$\dfrac{z}{z^2+4}$
9	1	$\dfrac{2z^2-z+1}{z^3-z}$
10	0	$\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$
11	-2	$\dfrac{2z^2+z+2}{z^2(z+2)}$
12	-1	$\dfrac{z^3+3z^2+2z+1}{z^2(z+1)^2}$

13	1	$\frac{e^z}{(z-1)^2}$
14	1	$\frac{3z^2-1}{z(z^2-1)}$
15	2	$\frac{z^2-3z+5}{(z+1)(z-2)^2}$
16	3	$\frac{1}{z^2-7z+12}$
17	0	$\frac{z^2+z+1}{z^3+z}$
18	-1	$\frac{2}{z^2-4z+3}$
19	-3	$\frac{2z^2+z+3}{z^2(z+3)}$
20	-1	$\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$
21	0	$\frac{2z^2+5z+4}{z^2(z+4)}$
22	0	$\frac{1}{z^2-5z+6}$
23	0	$\frac{3z^2-1}{z^2(z-1)}$
24	-1	$\frac{2z^2+4z+1}{z(z+1)^2}$
25	3	$\frac{9-2z}{z(3-\mathrm{z})^2}$
26	0	$ze^{\frac{1}{z}}$

27	0	$\frac{z^2}{z^2+9}$

Задача №9.

Функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0. Найти вычет функции $f(z)$ в точке z_0.

№		
1	$f(z) = zcos\frac{1}{z-2}$	$z_0 = 2$
2	$f(z) = sin\frac{z}{z-1}$	$z_0 = 1$
3	$f(z) = zsin\frac{z}{z-5}$	$z_0 = 5$
4	$f(z) = sin\frac{2z-7}{z+2}$	$z_0 = -2$
5	$f(z) = cos\frac{3z}{z-i}$	$z_0 = i$
6	$f(z) = sin\frac{5z}{z-2i}$	$z_0 = 2i$
7	$f(z) = sin\frac{3z-i}{3z+i}$	$z_0 = -\frac{i}{3}$
8	$f(z) = zcos\frac{3z}{z-1}$	$z_0 = 1$
9	$f(z) = zsin\frac{z}{z-1}$	$z_0 = 1$
10	$f(z) = (z-3)cos\pi\frac{z-3}{z}$	$z_0 = 0$

11	$f(z) = z^2 sin\pi \dfrac{z+1}{z}$	$z_0 = 0$
12	$f(z) = zcos \dfrac{z}{z+2i}$	$z_0 = -2i$
13	$f(z) = cos \dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$	$z_0 = 2$
14	$f(z) = sin \dfrac{z+i}{z-i}$	$z_0 = i$
15	$f(z) = sin \dfrac{z}{z-3}$	$z_0 = 3$
16	$f(z) = ze^{\frac{1}{z-2}}$	$z_0 = 2$
17	$f(z) = e^{\frac{z}{z-3}}$	$z_0 = 3$
18	$f(z) = sin \dfrac{2z}{z-4}$	$z_0 = 4$
19	$f(z) = sin \dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$	$z_0 = 2$
20	$f(z) = exp\left\{\dfrac{4z-2z^2}{(z-1)^2}\right\}$	$z_0 = 1$
21	$f(z) = zexp\left\{\dfrac{\pi}{(z-a)^2}\right\}$	$z_0 = a$
22	$f(z) = zexp\left\{\dfrac{\pi z}{z-\pi}\right\}$	$z_0 = \pi$
23	$f(z) = zsin\pi \dfrac{z+2}{z}$	$z_0 = 0$
24	$f(z) = zcos\pi \dfrac{z+3}{z-1}$	$z_0 = 1$

25	$f(z) = z^2 sin\dfrac{z+3}{z}$	$z_0 = 0$
26	$f(z) = zsin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$	$z_0 = 1$
27	$f(z) = zcos\dfrac{z}{z-3}$	$z_0 = 3$
28	$f(z) = zsin\pi\dfrac{z-1}{z-2}$	$z_0 = 2$
29	$f(z) = zcos\dfrac{z}{z-5}$	$z_0 = 5$
30	$f(z) = ze^{\frac{z}{z-4}}$	$z_0 = 4$
31	$f(z) = zsin\dfrac{\pi z}{z-a}$	$z_0 = a$

Задача №10.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и установить их тип.

№		№	
1	$f(z) = \dfrac{z^3}{1+z^4}$	2	$f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$
3	$f(z) = \dfrac{sinz}{z^2}$	4	$f(z) = z^2\left(\dfrac{1}{z} - sin\dfrac{1}{z}\right)$
5	$f(z) = \dfrac{1-cosz}{z^3}$	6	$f(z) = \dfrac{1}{z+z^2}$
7	$f(z) = \dfrac{z+1}{z^4+16}$	8	$f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^3(z+2)^2}$

9	$f(z) = \frac{1}{z+2} e^{\frac{1}{z+2}}$	10	$f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}$
11	$f(z) = \frac{sinz}{z(z^3+1)}$	12	$f(z) = \frac{1}{z^5 - 4z^3}$
13	$f(z) = \frac{sinz}{z^3(z-1)^3}$	14	$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2(z+1)}$
15	$f(z) = \frac{cosz}{(z^3+1)z^2}$	16	$f(z) = \frac{z^3+1}{(z+3)^2(z+1)}$
17	$f(z) = \frac{z^2}{1 - cosz}$	18	$f(z) = \frac{1 - cos2z}{z^2(z+1)}$
19	$f(z) = \frac{1}{z^3} cos\frac{1}{z}$	20	$f(z) = \frac{1}{z(1 - e^{2z})}$
21	$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+5)(z-1)}$	22	$f(z) = \frac{1}{z^4 - z^2}$
23	$f(z) = \frac{sin(z-3)}{(z-3)^3(z+4)^3}$	24	$f(z) = \frac{cos(z-5) - 1}{(z-5)^3(z+3)}$
25	$f(z) = \frac{sin(z-1)}{(z-1)^3(z+4)^3}$	26	$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-2}}}{(z-2)^2(z+3)}$
27	$f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{(z-1)^3}}$	28	$f(z) = \frac{1 - e^{z-2}}{(z-2)(z+3)^3}$
29	$f(z) = z^2\left(\frac{1}{z} - cos\frac{1}{z}\right)$	30	$f(z) = \frac{z^2+3}{z^2 - z - 2}$

Задача №11.

Вычислить интеграл по замкнутому контуру $\int f\,(z)dz$ с помощью вычетов.

№	$f(z)$	C
1	$\frac{cos\pi z}{(2z-1)^2}$	$\lvert z\rvert = 1$

2	$\frac{z}{sh^2\pi z}$	$\lvert z\rvert = \frac{1}{2}$
3	$\frac{sh\pi z}{(z+4)(z^2+4)}$	$\lvert z\rvert = 5$
4	$\frac{1}{z^4+16}$	$\lvert z-2\rvert = 2$
5	$\frac{z}{z^3+8}$	$\lvert z-2\rvert = 2\sqrt{2}$
6	$\frac{2z-1}{cos^2\pi z}$	$\left\lvert z-\frac{1}{2}\right\rvert = \frac{1}{2}$
7	$\frac{e^z}{z(z^2+2z+5)}$	$\lvert z+1-2i\rvert = 1$
8	$\frac{sin2z}{z^2(z^2+4)}$	$\lvert z\rvert = 1$
9	$\frac{sinz}{z^2(z-2)^2}$	$\lvert z\rvert = 1$
10	$\frac{z^3}{z^4-1}$	$\lvert z+1\rvert = 1$
11	$\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$	$\lvert z-2\rvert = \frac{1}{2}$
12	$\frac{cosz}{z^3-z^2-2z}$	$\lvert z+1\rvert = 2$
13	$\frac{shz}{z(z^2+2z+5)}$	$\lvert z+1+2i\rvert = 1$
14	$\frac{e^z}{z(z-1)^2(z-4)}$	$\lvert z\rvert = 2$
15	$\frac{cosz}{z^2(z+1)}$	$\lvert z\rvert = \frac{1}{2}$

16	$\frac{e^z}{z^4+8z^2-9}$	$\lvert z\rvert = 2$
17	$\frac{e^z}{z(z-\pi i)}$	$\lvert z-3i\rvert = 1$
18	$\frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)}$	$\lvert z\rvert = 2$
19	$\frac{e^z}{z^3(z-2)^2}$	$\lvert z-2\rvert = 1$
20	$\frac{e^z}{(z-1)^2 z}$	$\lvert z-2\rvert = \frac{3}{2}$
21	$\frac{z}{z^4+1}$	$(x-1)^2+\frac{y^2}{8} = 1$
22	$\frac{1}{(z+2)^2(z-3)^2}$	$\lvert z+2\rvert = 1$
23	$\frac{z}{cosz}$	$\left\lvert z-\frac{\pi}{2}\right\rvert = \frac{\pi}{2}$
24	$\frac{ch^2 z}{z^2(z+2)(z-1)}$	$\lvert z+1\rvert = \frac{3}{2}$
25	$\frac{z^2+1}{sh2z}$	$\left\lvert z-\frac{\pi i}{2}\right\rvert = 1$
26	$\frac{4}{chz}$	$\left\lvert z-\frac{\pi i}{2}\right\rvert = 1$
27	$\frac{1}{(z^2+4)^3}$	$\frac{(y-1)^2}{4}+x^2 = 1$
28	$ctg3z$	$\left\lvert z-\frac{\pi}{2}\right\rvert = 1$
29	$e^{\frac{z}{(1-z)}}$	$\lvert z\rvert = 2$

30	$z^3 e^{\frac{1}{z}}$	$\lvert z\rvert = 1$

Задача №12.

С помощью теоремы Руше найти число корней уравнения в указанной области.

1	$z^5 - 5z^2 + 2z + 1 = 0$	$1 < \lvert z\rvert < 2$
2	$z^6 - 7z^5 + 3z^3 - z - 1 = 0$	$1 < \lvert z\rvert < 2$
3	$z^4 - 5z^3 - z^2 - 1 = 0$	$\frac{1}{2} < \lvert z\rvert < 1$
4	$2z^5 - 3z^3 + 2z^2 - 5 = 0$	$\frac{1}{2} < \lvert z\rvert < 2$
5	$3z^4 + 2z^3 - z^2 - z + 3 = 0$	$\frac{1}{2} < \lvert z\rvert < 2$
6	$2z^3 - 7z^2 + 3z + 1 = 0$	$1 < \lvert z\rvert < 4$
7	$2z^5 - 8z^4 + z^3 + 2z^2 + z - 1 = 0$	$1 < \lvert z\rvert < 2$
8	$z^5 - 4z^3 - 10z^2 + 3 = 0$	$1 < \lvert z\rvert < 3$
9	$3z^6 - 4z^4 + 5z^2 - 15z - 1 = 0$	$1 < \lvert z\rvert < 2$
10	$2z^4 + 4z^3 - 17z^2 + 3z - 7 = 0$	$1 < \lvert z\rvert < 5$
11	$5z^5 + 4z^4 - 3z^3 - 2z^2 - 17 = 0$	$1 < \lvert z\rvert < 2$

12	$z^8 - 3z^5 + 2z^2 - 12z - 3 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
13	$5z^4 + 2z^3 - 13z^2 + 4z + 1 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
14	$2z^4 + 3z^3 - z^2 + 11z - 1 = 0$	$\frac{1}{2} < \|z\| < 3$
15	$2z^5 - 5z^4 + 5z - 1 = 0$	$2 < \|z\| < 3$
16	$z^6 - 10z^3 + 2z^2 + 3z - 1 = 0$	$2 < \|z\| < 3$
17	$z^7 - 5z^5 + 2z^4 + 1 = 0$	$1 < \|z\| < 3$
18	$3z^7 + z^6 - 9z^4 + 2z^2 - 2 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
19	$10z^4 - z^3 + 4z^2 - z - 3 = 0$	$\frac{1}{2} < \|z\| < 1$
20	$2z^3 - 3z^2 - 7z - 1 = 0$	$1 < \|z\| < 3$
21	$z^5 + 2z^4 - z^3 - 3z^2 + 13z - 5 = 0$	$1 < \|z\| < 4$
22	$z^5 - 2z^2 + 5z + 1 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
23	$z^4 - 6z^3 + z^2 - 10z + 1 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
24	$z^3 - 17z^2 + 25z - 5 = 0$	$1 < \|z\| < 2$
25	$4z^3 + 10z^2 - 3z + 1 = 0$	$2 < \|z\| < 3$

26	$3z^3 + 9z^2 - 5z - 1 = 0$	$2 < \|z\| < 4$
27	$2z^4 - z^3 + 6z^2 - z - 1 = 0$	$\frac{1}{4} < \|z\| < 1$
28	$z^6 - 5z^3 + z^2 + 1 = 0$	$\frac{1}{2} < \|z\| < 1$

Задача №13.

С помощью вычетов найти оригинал изображения $g(p)$.

№		№	
1	$\frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$	2	$\frac{p+1}{p^2(p-2)}$
3	$\frac{1}{(p-4)(p^2+9)}$	4	$\frac{p+1}{(p-1)(p+2)^2}$
5	$\frac{p-1}{(p+1)(p^2+1)}$	6	$\frac{1}{(p-1)(p^2-2p+2)}$
7	$\frac{p+1}{(p-1)(p+2)(p-3)}$	8	$\frac{1}{p^3+2p^2+p}$
9	$\frac{p-1}{(p^2+4)p^2}$	10	$\frac{p}{p^4-1}$
11	$\frac{p^2+1}{p^2(p-1)^2}$	12	$\frac{1}{(p^2+4)(p+4)}$
13	$\frac{p}{(p^2+1)^2}$	14	$\frac{1}{(p^2-4p)^2}$
15	$\frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$	16	$\frac{1}{p^2(p^2+1)}$

17	$\frac{1}{(p+3)(p+2)^2}$	18	$\frac{p}{(p^2+4)(p-1)}$
19	$\frac{1}{(p^2+9)p^2}$	20	$\frac{p+1}{p^3+4p^2+4}$
21	$\frac{p}{(p-2)(p+4)(p+1)}$	22	$\frac{p}{(p^2-9)^2}$
23	$\frac{p}{(p^2-4)^2}$	24	$\frac{1}{(p^2+1)(p+1)^2}$
25	$\frac{p}{(p-1)(p+2)^2}$	26	$\frac{1}{(p+3)(p+4)^2}$
27	$\frac{1}{p^2(p-4)}$	28	$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+9)}$
29	$\frac{p}{p^4-81}$	30	$\frac{1}{(p^2-1)(p^2+4)}$

Задача №14.

Вычислить интеграл с помощью *Г*-, *В*- функций.

№		№	
1	$\int_0^1 ln^2\frac{1}{x}dx$	2	$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$
3	$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$	4	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$
5	$\int_0^{+\infty} x^4\,e^{-x^2}dx$	6	$\int_0^1 ln^3\frac{1}{x}dx$
7	$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$	8	$\int_0^{\pi/2} sin^{2x}\,cos^4xdx$

9	$\int_0^1 x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}dx$	10	$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$
11	$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^4}$	12	$\int_0^1 ln^4\frac{1}{x}dx$
13	$\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}dx$	14	$\int_0^{+\infty} x^6\, e^{-x^2}dx$
15	$\int_0^{\pi/2} sin^4\, xcos^2xdx$	16	$\int_0^{\pi/2} tg^{1/2}\, xdx$
17	$\int_0^1 x^3\sqrt[5]{1-x^5}dx$	18	$\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}dx$
19	$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$	20	$\int_0^1 ln^5\frac{1}{x}dx$
21	$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^6}dx$	22	$\int_0^{\pi/2} sin^2\, xcos^6xdx$
23	$\int_0^1 x^4\sqrt[3]{1-x^3}dx$	24	$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2}$
25	$\int_0^1 x\sqrt{x-x^2}dx$	26	$\int_0^1 x^7\sqrt[3]{1-x^3}dx$
27	$\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$	28	$\int_0^{\pi/2} sin^6\, xcos^2xdx$
29	$\int_0^{+\infty} x^8\, e^{-x^2}dx$	30	$\int_0^1 ln^6\frac{1}{x}dx$

Задача №15.

Вычислить несобственный интеграл $\int_a^b f\,(x)dx$ с помощью вычетов.

№	$f(x)$	(a,b)
1	$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}$	$(0,+\infty)$
2	$\frac{(x^2+2)}{(x^2+1)(x^2+9)}$	$(-\infty,+\infty)$
3	$\frac{x-3}{x^4+5x^2+4}$	$(-\infty,+\infty)$
4	$\frac{(x+1)cos3x}{x^2+4x+104}$	$(-\infty,+\infty)$
5	$\frac{(x+1)sin2x}{x^2+2x+2}$	$(-\infty,+\infty)$
6	$\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}$	$(-\infty,+\infty)$
7	$\frac{(x-1)cosx}{x^2-4x+5}$	$(-\infty,+\infty)$
8	$\frac{x^2}{(x^2+4)^2}$	$(-\infty,+\infty)$
9	$\frac{x^2+1}{x^4+1}$	$(0,+\infty)$
10	$\frac{x^3sinx}{x^4+5x^2+4}$	$(-\infty,+\infty)$
11	$\frac{1}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$	$(-\infty,+\infty)$
12	$\frac{xsinx}{x^2+2x+10}$	$(-\infty,+\infty)$
13	$\frac{1}{(x^2+1)^3}$	$(0,+\infty)$

14	$\dfrac{(x^2+1)}{(x^2+9)(x^2+16)}$	$(-\infty,+\infty)$
15	$\dfrac{xcosx}{x^2-2x+10}$	$(-\infty,+\infty)$
16	$\dfrac{(x^3+5x)sinx}{x^4+10x^2+9}$	$(0,+\infty)$
17	$\dfrac{x^2}{(x^2+4)^3}$	$(0,+\infty)$
18	$\dfrac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}$	$(-\infty,+\infty)$
19	$\dfrac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}$	$(-\infty,+\infty)$
20	$\dfrac{1}{(x^2+1)^2(x^2+16)}$	$(-\infty,+\infty)$
21	$\dfrac{xsinx}{x^2+9}$	$(0,+\infty)$
22	$\dfrac{cosx}{x^2+4}$	$(0,+\infty)$
23	$\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$	$(-\infty,+\infty)$
24	$\dfrac{xsinx}{(x^2+1)^2}$	$(0,+\infty)$
25	$\dfrac{cosx}{x^2+9}$	$(0,+\infty)$
26	$\dfrac{xsinx}{x^4+5x^2+4}$	$(-\infty,+\infty)$
27	$\dfrac{2x^2+13x}{x^4+13x^2+36}$	$(-\infty,+\infty)$

28	$\dfrac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}$	$(-\infty,+\infty)$
29	$\dfrac{1}{(x^2+1)^4}$	$(-\infty,+\infty)$
30	$\dfrac{x\cos x}{x^4+5x^2+6}$	$(-\infty,+\infty)$

ПРИЛОЖЕНИЕ

В данном приложении излагается теория и методы решения типовых задач по темам, указанным ниже. Изучение материала этого Приложения необходимо для успешного усвоения курса математического анализа (4 семестр). Отметим, что усвоение материала предполагает полноценно сформированные знания и умения по математическому анализу 1-го, 2-го и 3-го семестров.

Тема № 1. «Комплексные числа и действия над ними».

1.1. Алгебраическая форма комплексного числа.

1.2. Геометрическое представление комплексного числа.

1.3. Действия над комплексными числами (сложения, вычитания, умножения и деления).

1.4. Тригонометрическая форма комплексного числа.

1.5. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

1.6. Показательная форма записи комплексного числа.

1.7. Изображение множеств на комплексной плоскости.

Тема № 2. «Функции комплексного переменного».

2.1. Определение функции комплексного переменного.

2.2. Элементарные функции комплексного переменного.

2.3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.

2.4. Связь аналитических и гармонических функций.

2.5. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Примеры конформных отображений.

Тема № 3. «Интегрирование функций комплексного переменного».

3.1. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства.

3.2. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.

Тема № 4. «Ряды Тейлора и Лорана».

4.1. Ряд Тейлора. Коэффициенты ряда. Разложение функции, аналитической в круге, в степенной ряд.

4.2. Ряд Лорана, его область сходимости.

4.3. Примеры разложения функций в ряд Лорана.

Тема № 5. «Вычеты функций».

5.1. Нули функции.

5.2. Изолированные особые точки.

5.3. Классификация изолированных особых точек по виду главной части ряда Лорана.

5.4. Вычеты функций.

Тема № 6. «Основная теорема о вычетах. Приложения вычетов».

6.1. Основная теорема о вычетах.

6.2. Вычет функции в бесконечно удаленной точке.

6.3. Вычисление несобственных интегралов.

6.4. Теорема Руше.

6.5. Приложение вычетов к вычислению преобразования Лапласа.

6.6. Вычисление интегралов Эйлера (Гамма-функция и Бета-функция).

Тема 1. Комплексные числа и действия над ними

1.1 Алгебраическая форма комплексного числа

Определение 1.1. *Комплексным числом* z *называется выражение вида*

$$z = x + iy, \tag{1.1}$$

где x *и* y *– действительные числа,* i *– мнимая единица, определяемая условием* $i^2 = -1$.

Числа x *и* y *называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа* z *и обозначаются* $x = \mathrm{Re}z$, $y = \mathrm{Im}z$.

Представление комплексного числа z по формуле (1.1) называется алгебраической формой комплексного числа.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженным комплексному числу $z = x + iy$.

Определение 1.2. *Комплексные числа* $\boldsymbol{z_1 = x_1 + iy_1}$ *и* $\boldsymbol{z_2 = x_2 + iy_2}$ *считаются равными тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{x_1 = x_2}$, $\boldsymbol{y_1 = y_2}$.

Пример 1.1.

Решить уравнение $(3 + 2i)x + (2 - i)y = -1 + 4i$.

Решение: Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части:

$$(3x + 2y) + (2x - y)i = -1 + 4i.$$

Из определения равенства двух комплексных чисел получаем

$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ \ \ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x = 1$, $y = -2$.

1.2 Геометрическое представление комплексного числа

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости xOy точкой M с координатами (x, y), либо вектором, начало которого

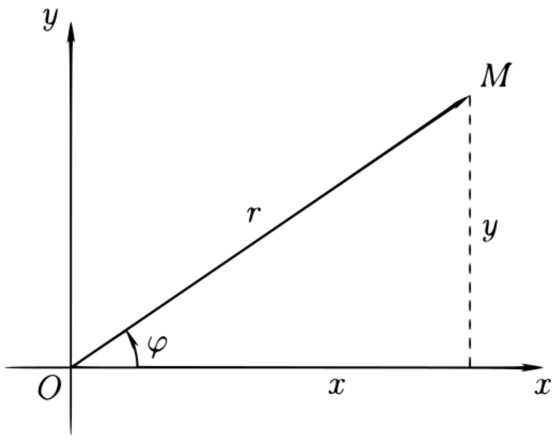


Рис. 1

находится в точке $O(0,0)$, а конец в точке $M(x, y)$ (см. рис.1).

Если $y = 0$, то $z = x + i \cdot 0 = x$, то есть получаем обычное вещественное, расположенное на оси OX, число. Если $x = 0$, то $z = iy$. Такие числа называются чисто мнимыми. Они изображаются точками на оси OY.

Определение 1.3. *Длина вектора* $\boldsymbol{z}(\overline{\boldsymbol{OM}})$ *называется модулем комплексного числа и обозначается*

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.2}$$

Определение 1.4. *Угол* φ, *образованный вектором* $\overrightarrow{OM}$ *с осью*

Ox, называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\varphi = Argz$; определяется с точностью до слагаемого $2\pi k(k = 0, \pm1, \ldots)$:

$$Argz = argz + 2\pi k, (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \qquad (1.3)$$

где $argz$ есть главное значение $Argz$, определяемое условиями $-\pi < atgz \leq \pi$.

В зависимости от положения точки на комплексной плоскости,

$$argz = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если z в I или IV четверти,} \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если z во II четверти,} \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & \text{если z в III четверти,} \\ 0, & \text{если x>0, y=0,} \\ \pi, & \text{если x<0, y=0,} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если x=0, y>0,} \\ \dfrac{-\pi}{2}, & \text{если x=0, y<0.} \end{cases} \qquad (1.4)$$

<u>Пример 1.2.</u>

Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 + \sqrt{3}i$.

Решение: модуль комплексного числа вычислим по формуле (1.2)

$$|z| = r = \left|-1 + \sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

Для нахождения аргумента определим положение числа на комплексной плоскости: $z = -1 + \sqrt{3}i$ лежит в II четверти. Используя формулу (1.4) найдем (см. рис. 2)

$$argz = \pi + arctg\frac{y}{x} = \pi + arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) =$$

$$= \pi - arctg\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

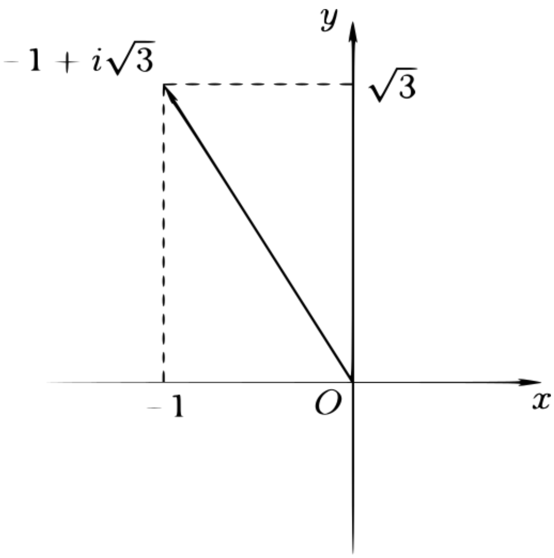


Рис. 2

Т.е. по формуле (1.3)

$$Argz = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k(k = 9, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

<u>Пример 1.3.</u>

Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -5i$.

Решение: число $z = -5i$ находится на мнимой оси: $x = 0$, $y = -5 < 0$.

Модуль z по формуле (1.2) $|z| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$.

$argz = -\frac{\pi}{2}$ из (1.4), т. е. $Argz = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

1.3 Действия над комплексными числами (сложение, вычитание, умножение и деление).

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Определение 1.5. *Суммой* $\boldsymbol{z_1 + z_2}$ *комплексных чисел* $\boldsymbol{z_1}$ *и* $\boldsymbol{z_2}$ *называется комплексное число*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Определение 1.6. *Разностью* $\boldsymbol{z_1 - z_2}$ *комплексных чисел* $\boldsymbol{z_1}$ *и* $\boldsymbol{z_2}$

называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).\backslash$$

Определение 1.7. *Произведением* $\boldsymbol{z_1 z_2}$ *комплексных чисел* $\boldsymbol{z_1}$ *и* $\boldsymbol{z_2}$ *называется комплексное число*

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Определение 1.8. *Частным* $\frac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}}$ *от деления комплексного числа* $\boldsymbol{z_1}$ *на комплексное число* $\boldsymbol{z_2 \neq 0}$ *называется такое комплексное число* $\boldsymbol{z}$*, которое удовлетворяет уравнению* $\boldsymbol{z z_2 = z_1}$*. Для частного имеет место формула*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

<u>Пример 1.4.</u>

Вычислить $(3 - i)(2 + 5i)$.

Решение: раскрывая скобки и учитывая $i^2 = -1$, получим

$$(3 - i)(2 + 5i) = 6 + 15i - 2i - 5i^2 = 6 + 5 + 13i = 11 + 13i.$$

<u>Пример 1.5.</u>

Вычислить $\frac{-2-3i}{1+4i}$.

Решение: умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю $1 - 4i$.

$$\frac{-2 - 3i}{1 + 4i} \cdot \frac{1 - 4i}{1 - 4i} = \frac{-2 - 12 - 3i + 8i}{1 + 16} = \frac{-14 + 5i}{17} = -\frac{14}{17} + \frac{5}{17}i.$$

<u>Пример 1.6.</u>

Вычислить i^{27}.

Решение: так как

$i^1 = i, \qquad i^5 = i,$

$i^2 = -1, \qquad i^6 = -1,$

$i^3 = -i, \qquad i^7 = -i,$

$i^4 = 1, \qquad i^8 = 1$

и т. д., то $i^{27} = (i^4)^6 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$.

1.4 Тригонометрическая форма комплексного числа.

Любое комплексное число $z = x + iy$ $(z \neq 0)$ можно записать в тригонометрической форме (см. рис. 1)

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi), \tag{1.5}$$

где $r = |z|, \varphi = Argz$.

<u>Пример 1.7.</u>

Записать в тригонометрической форме $z = -\sqrt{3} - i$.

Решение: модуль z найдем по формуле (1.2)

$$|z| = r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2.$$

Для нахождения аргумента определим положение z на комплексной плоскости: z лежит в III четверти (см. рис.3), тогда по (1.4)

$$argz = -\pi + arctg\frac{-1}{-\sqrt{3}} = -\pi + arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$

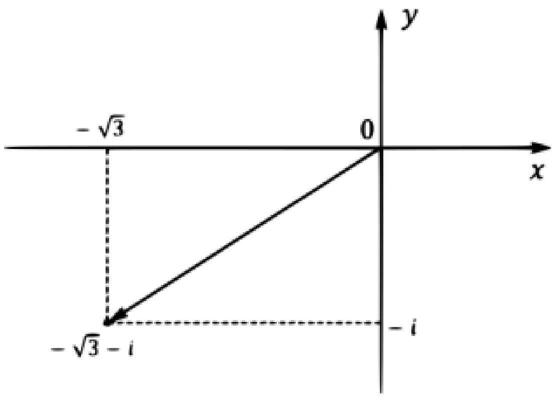


Рис. 3

Тогда $\varphi = Argz = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Подставляя значения модуля и аргумента в формулу (1.5), получим

$$z = -\sqrt{3} - i = 2\left[cos\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)\right] =$$
$$= 2\left[cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

1.5 Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Пусть комплексные числа z_1 и z_2 даны в тригонометрической форме $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$.

1. Произведение $z_1 z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 находится по формуле

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)], \qquad (1.6)$$

т. е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, Argz(z_1 z_2) = Argz_1 + Argz_2.$$

2. Частное двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)], \qquad (1.7)$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, Arg\frac{z_1}{z_2} = Argz_1 - Argz_2.$$

3. Возведение комплексного числа $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ в натуральную степень n производится по формуле

$$z^n = r^n(cosn\varphi + isinn\varphi), \qquad (1.8)$$

т. е.

$$|z^n| = |z|^n, Argz^n = nArgz + 2\pi k(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Из (1.8) получается формула Муавра

$$(cos\varphi + isin\varphi)^n = cosn\varphi + isinn\varphi. \qquad (1.9)$$

Часто формулу (1.8) также называют формулой Муавра.

4. Корень -й степени из комплексного числа $z \neq 0$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (1.10)$$

где $\varphi = argz, k = 0,1,2, \dots, n-1$.

Пример 1.8.

Вычислить $(2-2i)^{10}$.

Решение: представим число $z = 2 - 2i$ в тригонометрической форме: $2 - 2i = 2\sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Применяя формулу (1.8), получим

$$(2-2i)^{10} = \left(2\sqrt{2}\right)^{10}\left[cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{10\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 2^{15}cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) - isin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -2^{15} \cdot i.$$

Пример 1.9.

Вычислить $\sqrt[4]{-16}$.

Решение: представим число -16 в тригонометрической форме.

Число лежит на действительной оси: $x < 0$, $y = 0$.

Из (1.2) $|-16| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16$,из (1.4) $\varphi = \pi$.

По формуле (1.10)

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}\left(cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + isin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) =$$

$$= 2\left(cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + isin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right), k = 0,1,2,3.$$

Полагая последовательно $k = 0,1,2,3$, выпишем все корни

$$k = 0: z_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$k = 1: z_1 = 2\left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$k = 2: z_2 = 2\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right),$$

$$k = 3: z_3 = 2\left(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4}\right).$$

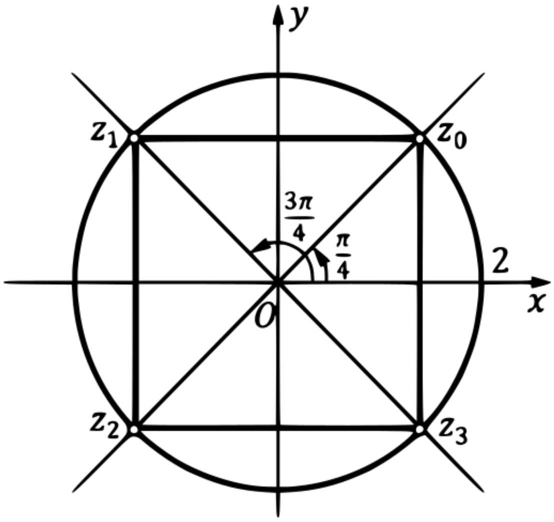


Рис. 4

На плоскости корни располагаются на окружности радиуса 2 в вершинах правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат (см. рис. 4)

Пример 1.10.

Решить уравнение $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

Решение: обозначим $t = z^2$. Тогда уравнение примет вид $t^2 - 2t + 4 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $t_2 = 1 - \sqrt{3}t$, откуда $z_{1,2} = \sqrt{t_1}$, $z_{3,4} = \sqrt{t_2}$.

Пусть $z = \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$. Представим в тригонометрической форме $1 + \sqrt{3}i = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$. Число $1 + \sqrt{3}i$ находится в I четверти, из (1.2), (1.4) найдем модуль и аргумент:

$$\left|1 + \sqrt{3}i\right| = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2, arg\left(1 + \sqrt{3}i\right) = \frac{\pi}{3}.$$

$$z_{1,2} = \sqrt{1+\sqrt{3}i} = \sqrt{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2} + isin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right), k = 0,1,$$

т.е.

$$z_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right), k = 0,$$
$$z_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{6} + isin\frac{7\pi}{6}\right), k = 1. \tag{1.11}$$

Пусть $z = \sqrt{1-\sqrt{3}i}$. Представим в тригонометрической форме $1-\sqrt{3}i$. Число $1-\sqrt{3}i$ находится в IV четверти, из (1.2), (1.4) найдем модуль и аргумент:

$|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2, arg\left(1-\sqrt{3}i\right) = -\frac{\pi}{3}$

т. е. $1-\sqrt{3}i = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

$$z_{3,4} = \sqrt{2}\left(cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2} + isin\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right), k = 0,1.$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right), k = 0,$$
$$z_4 = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right), k = 1. \tag{1.12}$$

Все корни находятся на окружности радиуса $R = \sqrt{2}$ из (1.11), (1.12) (см. рис.5).

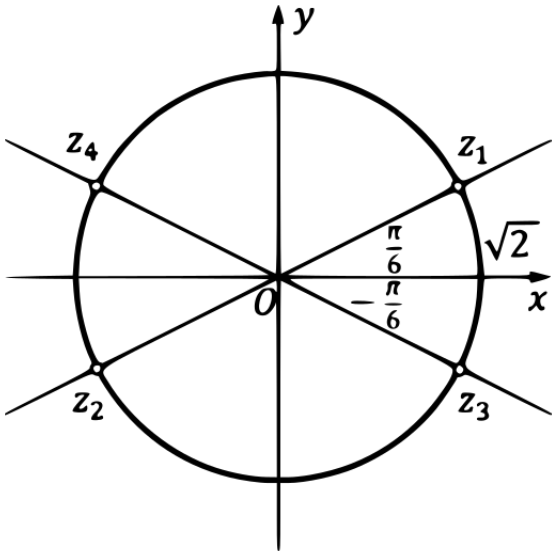


Рис. 5

1.6 Показательная форма записи комплексного числа.

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi \tag{1.13}$$

перепишем тригонометрическую форму записи комплексного числа из формулы (1.5) в виде

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi) = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|$, $\varphi = Argz$, т.е. любое комплексное число $z \neq 0$ можно записать в показательной форме

$$z = re^{i\varphi}, r = |z|, \varphi = Argz. \tag{1.14}$$

<u>Пример 1.11.</u> Записать комплексное число $z = -3 - 3i$ в тригонометрической и показательной форме.

Решение: число находится в III четверти. Используя формулы (1.2) и (1.4) найдем модуль и аргумент

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2},$$

$$argz = -\pi + arctg\frac{y}{x} = -\pi + arctg\left(\frac{-3}{-3}\right) = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

Тригонометрическая форма записи z

$$z = 3\sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) + isin\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)\right),$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Показательная форма записи

$$z = 3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (1.15)$$

но из (1.13)

$$e^{i2\pi k} = cos2\pi k + isin2\pi k = 1,$$

поэтому (6.22) можно переписать в виде $z = 3\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

1.7 Изображение множеств на комплексной плоскости.

Изобразить на комплексной плоскости линии и области, заданные уравнениями и неравенствами.

Пример 1.12.

Re $z \leq 3$.

Решение: т.к. Re $z = x$, то неравенство можно переписать так: $x \leq 3$. На плоскости xOy это определяет полуплоскость левее прямой $x = 3$ (см. рис. 6).

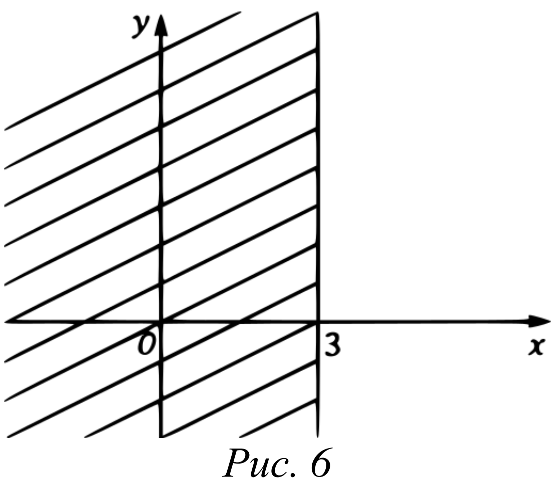


Рис. 6

<u>Пример 1.13.</u>

$|z| = 4$

Решение: по определению, $|z|$ – это расстояние от начала координат до точки z, т.е. $|z| = 4$ – это геометрическое множество точек, равноудаленных от начала координат. Таким геометрическим местом является окружность с центром в начале координат радиуса $R = 4$.

Также можно вывести уравнение кривой алгебраическим способом. Из (1.2) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, т. е. уравнение переписывается в виде $\sqrt{x^2 + y^2} = 4$, или $x^2 + y^2 = 4^2$ – это и есть уравнение окружности с центром в точке O и $R = 4$ (см. рис.7).

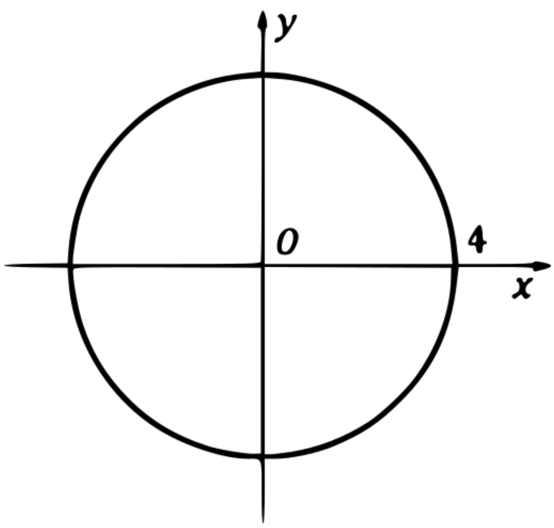


Рис. 7

<u>Пример 1.14.</u>

$1 < |z - 1 + i| \leq 2.$

Решение: $|z-1+i| = |z-(1-i)| \leq 2$

Это множество точек z, расстояние которых от точки $1-i$ не больше 2, то есть круг с центром в $1-i$ радиуса 2. Множество точек z таких, что $1 \leq |z-(1-i)|$ представляет собой внешность круга радиуса 1 с центром в точке $1-i$. Таким образом, исходное множество – кольцо с центром в точке $1-i$ (см. рис.8).

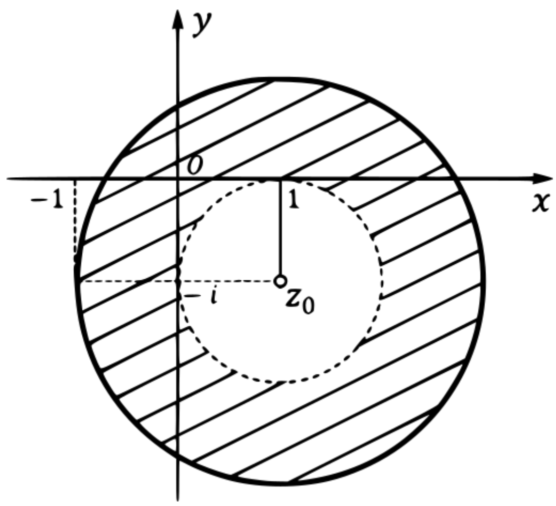


Рис. 8

Алгебраический способ: перепишем неравенство в виде $1 < |(x-1)+i(y+1)| \leq 2$. Данное множество точек должно одновременно удовлетворять двум условиям

$$\begin{cases} |(x-1)+i(y+1)| \leq 2 \\ |(x-1)+i(y+1)| > 1. \end{cases}$$

Используя определение модуля (1.2), получим

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} \leq 2 \\ \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} > 1, \end{cases}$$

возводя в квадрат, получим

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2 \leq 2^2\\(x-1)^2+(y+1)^2 > 1^2.\end{cases}$$

Первое неравенство системы представляет собой множество точек внутри круга с центром в точке $1-i$ и радиусом $R_2 = 2$. Граница области входит в рассматриваемое множество. Второе неравенство системы – это внешность единичного круга с центром в точке $1-i$, граница круга в область не входит. Одновременное выполнение двух неравенств определяет кольцо с центром в точке $z_0 = 1-i$ и радиусами $R_1 = 1$, $r_2 = 2$. Т.к. окружность радиуса R_1 не входит в область, её обозначают пунктиром (см. рис.8).

Пример 1.15.

$$-\frac{\pi}{6} < argz \leq \frac{\pi}{3}.$$

Решение: множество точек, удовлетворяющих двойному неравенству, совпадает с точками угла с вершиной в начале координат, заключенного между лучами $\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$. Луч $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ входит в данное множество, а луч $\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$ не входит (см. рис. 9).

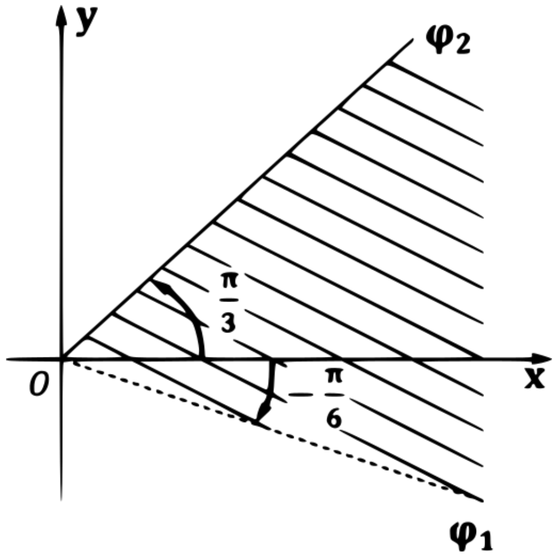


Рис. 9

Пример 1.16.

$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \geq 1.$

Решение: умножим обе части неравенства на положительное число $|z+1|$, получим $|z-1| \geq |z+1|$. Положим $z = x + iy$.

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

Возведем в квадрат:

$$(x-1)^2 + y^2 \geq (x+1)^2 + y^2.$$

Перенося в левую часть все слагаемые, получим $(x-1)^2 - (x+1)^2 \geq 0$ или $-4x \geq 0$, или $x \leq 0$ – это левая полуплоскость вместе с границей $x = 0$ (см. рис. 10).

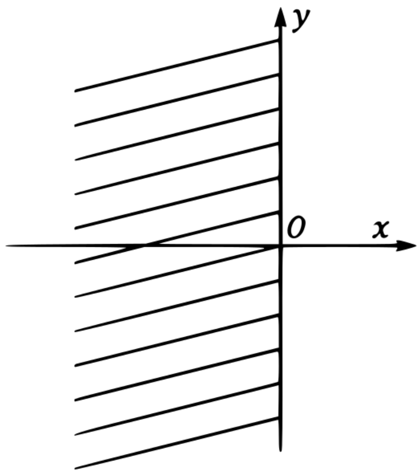


Рис. 10

Тема 2. Функции комплексного переменного

2.1 Определение функции комплексного переменного.

Определение 2.1. $\boldsymbol{\delta}$ *-окрестностью точки* $\boldsymbol{z_0}$ *называется множество точек* $\boldsymbol{z}$, *лежащих внутри круга радиуса* $\boldsymbol{\delta}$ *с центром в точке* $\boldsymbol{z_0}$, *т. е. множество точек, удовлетворяющих неравенству* $|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}| < \boldsymbol{\delta}$.

Определение 2.2. *Областью комплексной плоскости называется множество точек* $\boldsymbol{D}$, *обладающее следующими свойствами:*

1. *вместе с каждой точкой из D этому множеству принадлежит и некоторая окрестность этой точки, то есть некоторый круг без границы с центром в этой точке (свойство открытости);*
2. *две любых точки из D можно соединить ломаной, состоящей из точек D (свойство связности).*

Определение 2.3. *Область называется односвязной, если любую замкнутую кривую, лежащую в этой области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы этой области.*

Определение 2.4. *Граничной точкой области* $\boldsymbol{D}$ *называют такую точку, которая сама не принадлежит* $\boldsymbol{D}$, *но в любой окрестности которой лежат точки этой области.*

Определение 2.5. *Совокупность граничных точек области* $\boldsymbol{D}$ *называют границей этой области.*

Определение 2.6. *Область* $\boldsymbol{D}$ *с присоединенной к ней границей называется замкнутой областью и обозначается* $\overline{\boldsymbol{D}}$.

Определение 2.7. *Говорят, что в области* $\boldsymbol{D}$ *определена функция* $\boldsymbol{\omega = f(z)}$ *, если каждой точке* $\boldsymbol{z \in D}$ *поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или целое множество (многозначная функция) значений* $\boldsymbol{\omega}$.

<u>Пример 2.1.</u>

$\omega = |z|$ – однозначная функция,

$\omega = \sqrt[n]{z}$ – n-значная функция, т.к. имеет n корней,

$\omega = Argz$ – бесконечнозначная функция, т.к. слагаемое $2\pi k$, входящее в $Argz$ (см. (1.3)), принимает бесконечное число значений при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Геометрически задание функции $\omega = f(z)$ означает задание отображения точек комплексной плоскости z на соответствующие точки комплексной плоскости ω.

Пусть $z = x + iy$ и $\omega = f(z)$, тогда

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{2.1}$$

где $u(x, y) = \mathrm{Re}f(z)$ – действительная часть функции, $v(x, y) = \mathrm{Im}f(z)$ – мнимая часть функции.

<u>Пример 2.2.</u>

Найти действительную и мнимую части функции $\omega = z^2 + i\bar{z}$.

Положим $z = x + iy$, тогда $\omega = (x + iy)^2 + i(x - iy) = x^2 + 2xyi - y^2 + ix + y = (x^2 - y^2 + y) + i(2xy + x)$. $u(x, y) = x^2 - y^2 + y$ – действительная часть функции, $v(x, y) = 2xy + x$ – мнимая часть функции.

2.2 Элементарные функции комплексного переменного

Основные элементарные функции комплексного переменного определяются следующими формулами $(z = x + iy)$

1. Дробно-рациональная функция

$$\omega = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + a_m}.$$

В частности, рациональной функцией является многочлен $\omega = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$.

2. Показательная функция e^z определяется как сумма абсолютно сходящегося во всей комплексной плоскости степенного ряда

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Свойства показательной функции:

а) $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$, где z_1, z_2 – комплексные числа,
в) $e^{z + 2\pi k i} = e^z (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – было показано в примере (6.22), т.е. e^z – периодическая функция с периодом $2\pi i$.

3. Тригонометрические функции

Функции $sinz$ и $cosz$ определяются степенными рядами

$$sinz = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

абсолютно сходящимися при любом комплексном z.

$sinz$ и $cosz$ – периодические функции с периодом $T = 2\pi$.

$sinz = 0$ имеет решение $z = k\pi$, $cosz = 0$ имеет решение $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Функции tgz и $ctgz$ определяются равенствами $tgz = \frac{sinz}{cosz}$, $ctgz = \frac{cosz}{sinz}$. Для тригонометрических функций остаются в силе все формулы тригонометрии.

Для функций e^z, $sinz$ и $cosz$ имеют место формулы Эйлера

$$e^{iz} = cosz + isinz, e^{-iz} = cosz - isinz,$$

откуда

$$cosz = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, sinz = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad (2.2)$$

4. Гиперболические функции.

Гиперболические функции shz, chz, thz, $cthz$ определяются равенствами

$$\begin{gathered} shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ thz = \frac{shz}{chz}, cthz = \frac{chz}{shz}. \end{gathered} \qquad (2.3)$$

5. Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями

$$\begin{aligned} &sinz = -ishiz, cosz = chiz, tgz = -ithiz, \\ &ctgz = icthiz, shz = -isiniz, chz = cosiz, \\ &thz = -itgiz, cthz = ictgiz. \end{aligned} \qquad (2.4)$$

6. Логарифмическая функция $\mathrm{Ln}\, z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\begin{gathered} \mathrm{Ln}\, z = ln|z| + iArgz = ln|z| + i(argz + 2\pi k), \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{gathered} \qquad (2.5)$$

Функция $\omega = \mathrm{Ln}\, z$ является многозначной.

Определение 2.8. *Главным значением* $\mathrm{Ln}\, \boldsymbol{z}$ *называется значение, получаемое при* $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$

$$lnz = ln|z| + iargz. \qquad (2.6)$$

Тогда (2.5) перепишется в виде: $\mathrm{Ln}\, z = lnz + 2\pi ki$

Свойства $\omega = Ln\, z$:

$$\text{a) } \operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\text{b) } \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

7. Общая показательная функция определяется равенством

$$a^z = e^{z\operatorname{Ln}a}, \tag{2.7}$$

где a – любое комплексное число, $a \neq 0$.

8. Общая степенная функция $w = z^a$, где a – любое комплексное число, $z \neq 0$

$$z^a = e^{a\operatorname{Ln}z}. \tag{2.8}$$

<u>Пример 2.3.</u>

Вычислить $\operatorname{Ln}(-1)$.

Из формулы (2.5)

$$\operatorname{Ln}(-1) = ln|-1| + i(arg(-1) + 2\pi k) = i(\pi + 2\pi k) =$$
$$= (2k+1)\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

<u>Пример 2.4.</u>

Вычислить $sin(3-i)$.

Используя формулы (2.2) перепишем $sin(3-i)$, т. к. $sinz = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, то

$$sin(3-i) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(3-i)} - e^{-i(3-i)}\right] = -\frac{i}{2}\left[e^{1+3i} - e^{-1-3i}\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}[e(cos3 + isin3) - e^{-1}(cos3 - isin3)] =$$

$$= -i\left[cos3\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right) + isin3\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)\right] =$$

$$= sin3ch1 - icos3sh1.$$

Пример 2.5.

Вычислить i^{2i}.

Положим $a = i, z = 2i$ и воспользуемся формулой (2.7)

$$i^{2i} = e^{2i\mathrm{Ln}i}.$$

Вычислим отдельно $\mathrm{Ln}(i)$. Используя формулу (2.5), получим:

$\mathrm{Ln}(i) = ln|i| + i(argi + 2\pi k) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$

$|i| = \sqrt{0 + 1^2} = 1, ln|i| = ln1 = 0, argi = \frac{\pi}{2},$

$i^{2i} = e^{2i\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} = e^{-\pi-4\pi k}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример 2.6. Решить уравнение $sinz = 3$, корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

Используя формулу (2.2), уравнение можно переписать в виде $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 3$ или $e^{2iz} - eie^{iz} - 1 = 0$ – это квадратное уравнение относительно e^{iz}. Его корни

$$e^{iz} = 3i \pm 2\sqrt{2}i = i(3 \pm 2\sqrt{2})$$

Прологарифмируем полученное равенство

$$\begin{aligned} iz &= \mathrm{Ln}\left(i(3 \pm 2\sqrt{2})\right) = ln\left|i(3 \pm 2\sqrt{2})\right| + \\ &+ i\left(arg\left(i(3 \pm 2\sqrt{2})\right) + 2\pi k\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.9}$$

Вычислим $\left|i(3 \pm 2\sqrt{2})\right| = 3 \pm 2\sqrt{2}$, $arg\left(i(3 \pm 2\sqrt{2})\right) = \frac{\pi}{2}$ и подставим в (2.9), получим

$$iz = ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

отсюда вычислим

$$z = \frac{1}{i}ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - iln(3 \pm 2\sqrt{2}).$$

Получили две серии корней

$$z_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - iln\left(3 + 2\sqrt{2}\right),\ z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - iln\left(3 - 2\sqrt{2}\right).$$

Преобразуем z_2.

$$-ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = ln\frac{1}{3-2\sqrt{2}} = ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right),$$

поэтому

$$z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k + iln\left(3 + 2\sqrt{2}\right).$$

Корни находятся на двух прямых, параллельных оси Ox и отстоящих от нее на расстояние $ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$.

На рис. 11 корни отмечены «х».

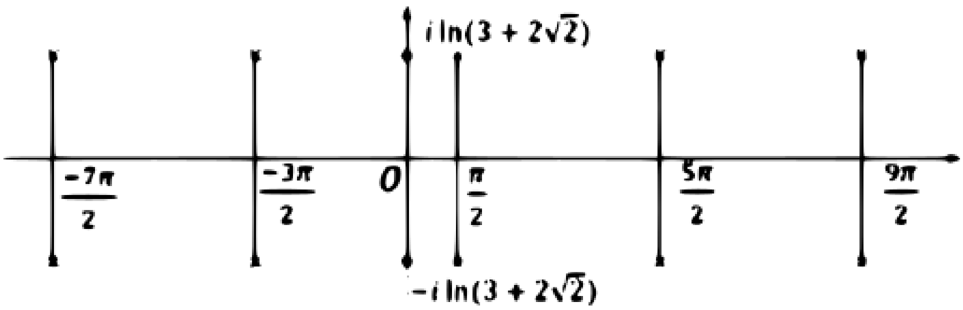


Рис. 11

2.3 Предел и непрерывность функции комплексного переменного.

Определение 2.9. *Число A называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек z, удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z\to z_0} f\,(z) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon): \forall z: 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon$. z_0 и A – конечные точки комплексной плоскости.*

Определение 2.10. *Функция $f(z)$, заданная в области D, называется непрерывной в точке $z_0 \in D$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f\,(z) = f(z_0)$.*

Теорема 2.1. *Для того, чтобы функция комплексной переменной* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *была непрерывна в точке* $z_0 = z_0 + iy_0$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *были непрерывны в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *по совокупности переменных* x *и* y.

Пример 2.7.

Вычислить предел функции $\lim\limits_{z \to -2i} \frac{z^2+iz+2}{z+2i}$.

Решение: Непосредственная подстановка в числитель и знаменатель предельного значения аргумента $z = -2i$ обращает их в нуль и приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители, выделяя множитель $(z + 2i)$:

$$\lim_{z \to -2i} \frac{z^2 + iz + 2}{z + 2i} = \lim_{z \to -2i} \frac{(z + 2i)(z - i)}{z + 2i} = \lim_{z \to -2i} (z - i) = -3i.$$

2.4 Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана.

Пусть $\omega = f(z)$ определена в некоторой области D комплексного переменного z. Пусть точки z и $z + \Delta z$ принадлежат области D.

Обозначим

$$\Delta\omega = f(z + \Delta z) - f(z), \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Определение 2.11. *Функция* $\omega = f(z)$ *называется дифференцируемой в точке* $z \in D$, *если отношение* $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ *имеет конечный предел при* Δz, *стремящемся к нулю. Этот предел называется производной функции* $f(z)$ *в данной точке* z *и обозначается* $f'(z)$ *или* ω', *т.е.*

$$\omega' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}. \tag{2.10}$$

Определение 2.12. *Функция* $f(z)$ *называется аналитической в* *точке* z_0*, если она дифференцируема в самой точке* z_0 *и в некоторой окрестности этой точки.*

Теорема 2.2. *Для того, чтобы функция* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *была дифференцируема в точке* $z = x + iy$*, необходимо и достаточно, чтобы функции* $u(x, y)$*,* $v(x, y)$ *были дифференцируемы в точке* (x, y) *и чтобы в этой точке имели место равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.11}$$

называемые условиями Коши-Римана. При этом формулы для производной функции $f'(z)$ *имеют вид:*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.12}$$

В следующих примерах установить аналитичность функции.

<u>Пример 2.8.</u>

$f(z) = z^2$.

Решение: выделим действительную и мнимую части функции, подставив вместо $z = x + iy$:

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi,$$

т. е.

$$\mathrm{Re}f(z) = u(x, y) = x^2 - y^2, \mathrm{Im}f(z) = v(x, y) = 2xy.$$

Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы во всех точках (x, y). Проверим выполнение условий Коши-Римана (2.11):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \frac{\partial y}{\partial y} = -2y, \frac{\partial v}{\partial x} = 2y.$$

Условия (2.11) выполнены, т.е. выполнены условия теоремы (2.11), следовательно $f(z) = z^2$ аналитична во всей комплексной плоскости.

<u>Пример 2.9.</u>

$f(z) = 3\overline{z} + 2.$

Решение: выделим действительную и мнимую части функции, подставим вместо $\overline{z} = x - iy$

$$f(z) = 3(x - iy) + 2 = (3x + 2) - 3yi,$$

т.е.

$$\mathrm{Re}f(z) = u(x, y) = 3x + 2, \mathrm{Im}f(z) = v(x, y) = -3y.$$

Функции$u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы во всех точках (x, y), проверим выполнение условий Коши-Римана (2.11)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3, \frac{\partial v}{\partial y} = -3, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

так что $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, т.е. первое условие Коши-Римана не выполнено ни в одной точке комплексной плоскости. Значит функция $\omega(z) = 3\overline{z} + 2$ нигде не дифференцируема, а следовательно и не аналитическая.

Обычные правила дифференцирования функций действительного переменного остаются справедливыми для функций комплексного переменного. Если $f_1(z)$, $f_2(z)$ аналитические в области D, то

1) $f_1(z) \pm f_2(z)$, $f_1(z) \cdot f_2(z)$ – также аналитические в области D,

2) $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ аналитична во всех точках области D, где $f_2(z) \neq 0$.

При этом имеют место формулы

$$[f_1(z) \pm f_2(z)]' = f_1'(z) \pm f_2'(z),$$

$$[cf_1(z)]' = cf_1'(z), \left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]' = \frac{f_1'(z)f_2(z) - f_2'(z)f_1(z)}{f_2^2(z)},$$

$$[f_1(z) \cdot f_2(z)]' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z).$$

Справедлива также таблица производных:

$(z^n)' = nz^{n-1}$	$(cosz)' = -sinz$
$(e^z)' = e^z$	$(sinz)' = cosz$
$(\mathrm{Lnz})' = \frac{1}{z}$	$(tgz)' = \frac{1}{cos^2 z}$

$(chz)' = shz$ $\qquad$ $(ctgz)' = -\frac{1}{sin^2 z}$

$(shz)' = chz$

2.5 Связь аналитических и гармонических функций.

Определение 2.13. *Функция $\psi(x, y)$ называется гармонической в области D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \tag{2.13}$$

Теорема 2.3. *Если функция $f(z) = u + iv$ аналитична в некоторой области D, то ее действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ являются гармоническими в этой области функциями, т. е. $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{2.14}$$

Определение 2.14. *Две гармонические функции, связанные условиями Коши-Римана, называются сопряженными.*

Пример 2.10.

Показать, что функция $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ является гармонической. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по действительной части $u(x, y)$ и условию $f(0) = 2$.

Решение: найдем частные производные функции $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

Сложим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$, т. е. $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и является гармонической.

Функция $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ и искомая функция $v(x, y)$

должны удовлетворять условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1,$$

но из (2.11)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1.$$

Интегрируем последнее уравнение по y (считая x постоянной), получаем

$$v(x, y) = \int (2x + 1)\, dy + c(x) = (2x + 1)y + c(x). \qquad (2.15)$$

Из второго условия Коши-Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y. \qquad (2.16)$$

Вычислим $\frac{\partial y}{\partial x}$ используя (2.15) и приравняем оба выражения $2y + c'(x) = 2y$, т.е. $c'(x) = 0$. Отсюда находим $c(x) = \text{c}_1$, где c_1 – постоянная, т.е. $v(x, y) = (2x + 1)y + c_1$. Следовательно,

$$f(x + iy) = x^2 - y^2 + x + i[(2x + 1)y + c_1].$$

Для того, чтобы записать функцию$f(z)$, можно взять $y = 0, x = z$, тогда$f(z) = z^2 + z + ic_1$. Для нахождения c_1 воспользуемся условием $f(0) = 2$, $2 = ic_1$, т.е. $c_1 = -2i$, окончательно $f(z) = z^2 + z + 2$.

2.6 Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Примеры конформных отображений.

Рассмотрим функцию $\omega = f(z)$, аналитическую в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $\omega = f(z)$ плоскости z на плоскость ω:

при $|f'(z_0)| > 1$ имеет место растяжение,

при $|f'(z_0)| < 1$ имеет место сжатие.

Аргумент производной $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой на плоскости z, проходящей через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке $\omega_0 = f(z_0)$ к образу этой кривой на плоскости ω при отображении $\omega = f(z)$.

Если$\varphi = arg f(z) > 0$, то поворот происходит против часовой стрелки, если $\varphi = arg f(z) < 0$ – по часовой.

Определение 2.15. *Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки ω_0, осуществляемое функцией $\omega = f(z)$, $f'^{(z_0)} \neq 0$ называется конформным в точке z_0, если в точке z_0 оно обладает свойством сохранения углов между линиями и постоянством растяжений.*

Свойство сохранения углов означает: если при отображении $\omega = f(z)$ кривые γ_1 и γ_2 переходят соответственно в кривые Γ_1 и Γ_2, то угол φ между касательными k_1 и k_2 к кривым γ_1 и γ_2 в точке z_0 будет равен угла Φ между соответствующими касательными K_1 и K_2 к кривым Γ_1 и Γ_2 в точке ω_0, т.е. $\Phi = \varphi$ (см. рис. 12).

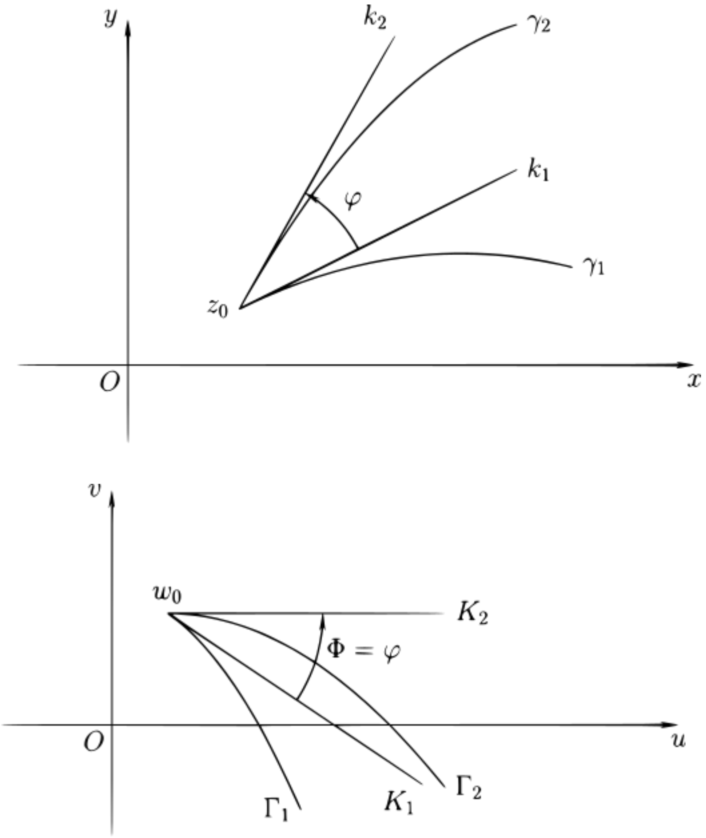


Рис. 12

Свойство постоянства растяжений: при отображении, осуществляемом аналитической функцией, $f'(z_0) \neq 0$ «малые элементы» в точке z_0 преобразуются подобным образом с коэффициентом $k = |f'(z_0)|$.

Рассмотрим примеры конформных отображений, осуществляемые линейной функцией $\omega = az + b$ и степенной $\omega = z^n$.

1. Линейная функция $\omega = az + b$, где a и b – постоянные комплексные числа ($a \neq 0$). Пусть $a = re^{ia}$, $z = |z|e^{i\psi}$. Рассмотрим два преобразования, составляющие функцию ω:

$$\omega_1 = az,$$
$$\omega = \omega_1 + b,$$
$$\omega_1 = re^{i\alpha} \cdot |z|e^{i\psi} = r|z|e^{i(\alpha+\psi)},$$

т.е. $\omega_1 = r|z|$, $arg\omega_1 = \psi + \alpha$. Значит, функция ω_1 осуществляет преобразование подобия с центром в начале координат и коэффициентом, равным r и поворот вокруг начала координат на угол α.

Преобразование $\omega = \omega_1 + b$ – параллельный перенос с помощью вектора, соответствующего комплексному числу b.

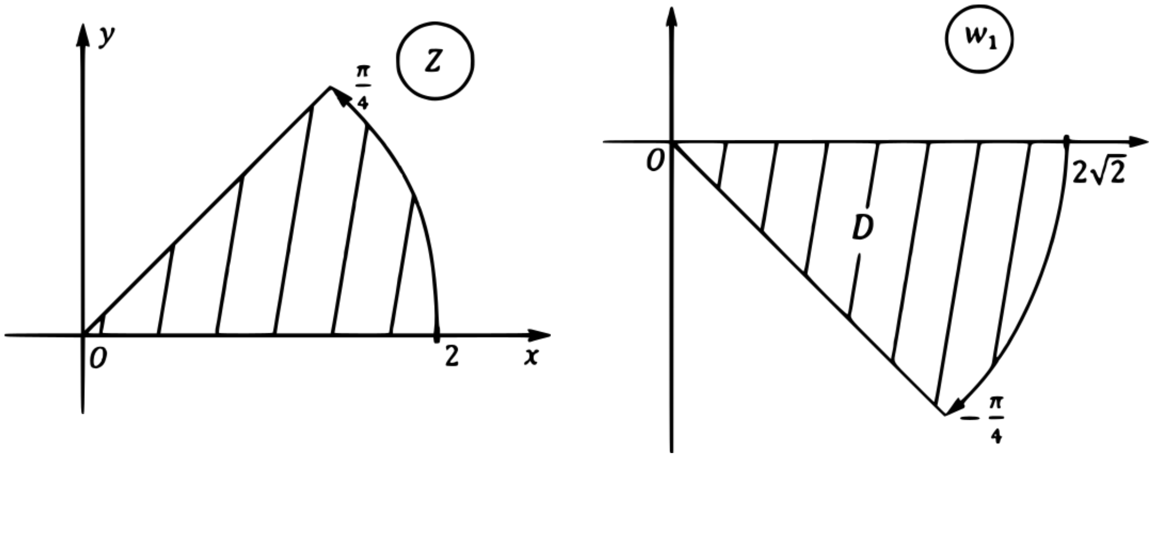
Таким образом, при отображении $\omega = az + b$ нужно вектор z повернуть на угол $\alpha = arga$, изменить его длину в $r = |a|$ раз и параллельно перенести на вектор b.

<u>Пример 2.11.</u>

Определить область D_2 плоскости ω, на которую отобразится область D_1 плоскости z функцией $\omega = (1 - i)z + 2i$. Область D_1: $|z| \leq 2,\ 0 \leq argz \leq \frac{\pi}{4}$.

Решение: Представим функцию $\omega = (1 - i)z + 2i = \omega_1 + 2i$, где $\omega_1 = (1 - i)z$. Коэффициент $a = 1 - i$, $|a| = \sqrt{2}$, $arga = -\frac{\pi}{4}$, т.е. ω_1 осуществляет поворот области D_1 на угол $-\frac{\pi}{4}$ (поворот по часовой стрелке на $\frac{\pi}{4}$) и растяжение с коэффициентом $|a| = \sqrt{2}$.

В результате получаем, что область D_1 перешла в область D. Заключительный шаг: $\omega = \omega + 2i$ – это параллельный перенос полученной области D на вектор, соответствующий числу $2i$ (см. рис. 13).



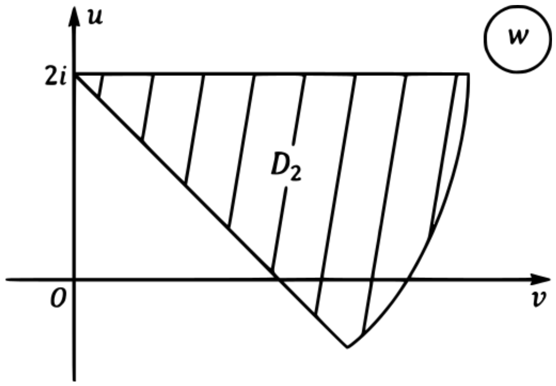


Рис. 13

2. <u>Степенная функция</u> $\omega = z^n$, $n \geq 2$ – целое положительное число.

Отображает взаимно-однозначно и конформно внутренность угла с вершиной в начале координат, раствор которого θ не превосходит $\frac{2\pi}{n}$ на внутренность угла с вершиной в начале координат раствора $n\theta$.

<u>Пример 2.12.</u>

Определить область D_2 плоскости ω, на которую отобразится область D_1 плоскости z функцией $\omega = z^2$. Область D_1:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{6} \leq argz \leq \frac{\pi}{3}, \\ |z| \leq 3. \end{cases}$$

Решение: при отображении $\omega = z^2$ луч $argz = -\frac{\pi}{6}$ перейдет в луч $arg\omega = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$, луч $argz = \frac{\pi}{3}$ перейдет в луч $argz = \frac{2\pi}{3}$.

$|\omega| = |z|^2 = 9$, т. е. получим область D_2 (см. рис. 14):

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \leq arg\omega \leq \frac{2\pi}{3}, \\ |z| \leq 9. \end{cases}$$

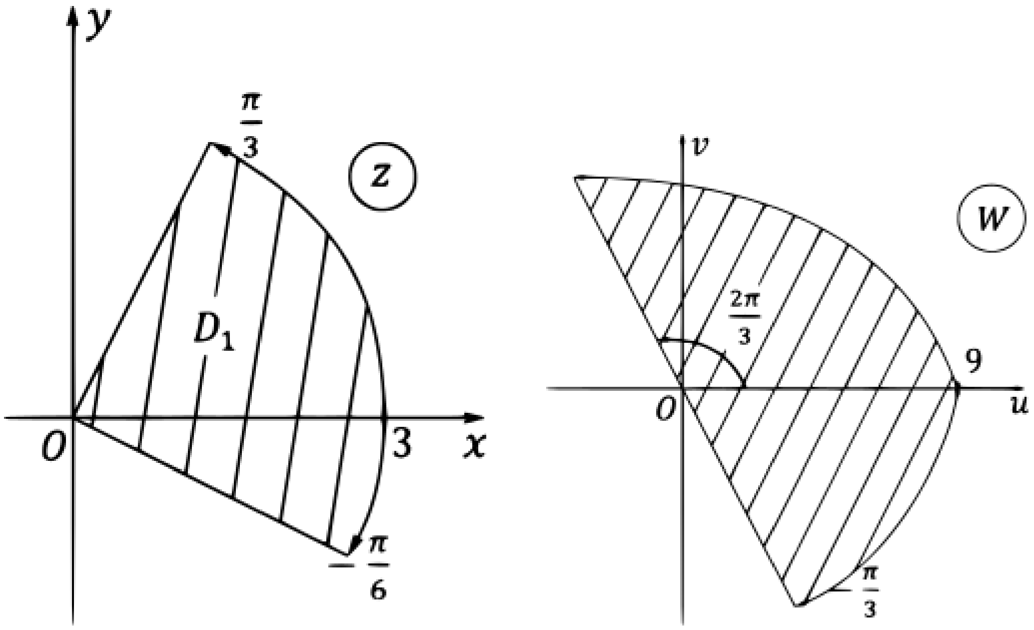


Рис. 14

Тема 3. Интегрирование функций комплексного переменного

3.1 Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства.

Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, определенную и непрерывную в области D и кусочно-гладкую кривую L, лежащую в D.

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где $u(x,y)$, $v(x,y)$ – действительные функции переменных x и y.

Можно показать, что вычисление интеграла от функции $f(z)$ комплексного переменного z сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов, а именно

$$\begin{gathered}\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + \\ +i\int_L u(x,y)dy + v(x,y)dx.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Интеграл от функции комплексного переменного обладает свойствами:

1. Линейности

$$\int_L [c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)]\, dz = c_1 \int_L f_1\,(z)dz \pm c_2 \int_L f_2\,(z)dz,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные,

2. Аддитивности

$$\int_{L_1+L_2} f\,(z)dz = \int_{L_1} f\,(z)dz + \int_{L_2} f\,(z)dz,$$

где $L_1 + L_2$ – кривая, составленная из кривых L_1 и L_2,

3.

$$\int_L f\,(z)dz = -\int_{L^-} f\,(z)dz,$$

где L^- – кривая, совпадающая с L, но проходимая в противоположном направлении,

4. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f\,(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\,|_{z_0}^{z_1}, \qquad (3.2)$$

где $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т.е. $\Phi'(z) = f(z)$ в области D,

5. Если кривая L задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t)$$

начальная и конечная точки дуги L соответствуют значениям параметра $t = t_0$, $t = t_1$, то

$$\int_L f\,(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f\,[z(t)]z'(t)dt, \qquad (3.3)$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Пример 3.1.

Вычислить интеграл $\int_L (2\overline{z} - i)\, dz$ по параболе $y = x^2$, соединяющей точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.

Решение: Перепишем подынтегральную функцию в виде $2\overline{z} - i = 2x - 2yi - i = 2x - i(2y+1)$, т.е. $u(x,y) = 2x, v(x,y) = -(1+2y)$. Проверим условие Коши-Римана (2.4)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2, \frac{\partial v}{\partial y} = -2$$

– первое условие не выполняется, т.е. подынтегральная функция не аналитична. Используем для вычисления интеграла формулу (3.1)

$$\int_L (2\overline{z} - i)\,dz = \int_L 2\,xdx + (1+2y)dy + i\int_L 2\,xdy - (1+2y)dx.$$

Для параболы $y = x^2$ имеем $dy = 2xdx$ $(0 \le x \le 1)$. Тогда

$$\int_L (2\overline{z} - i)\,dz = \int_0^1 [2x + (1+2x^2)2x]\,dx +$$

$$+i\int_0^1 [2x \cdot 2x - (1+2x^2)]\,dx =$$

$$= \left(\frac{4x^2}{2} + \frac{4x^4}{4}\right)\Big|_0^1 + i\left(\frac{2x^3}{3} - x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 3 + i\left(\frac{2}{3} - 1\right) = 3 - \frac{1}{3}i.$$

<u>Пример 3.2.</u>

Вычислить интеграл $\int_i^{2i} (3z^2 + 1)\,dz$.

Решение: Так как подынтегральная функция аналитична всюду (для проверки достаточно проверить все условия (2.11) Коши-Римана), то можно применить формулу (3.2) Ньютона-Лейбница

$$\int_i^{2i} (3z^2 + 1)\,dz = (z^3 + z)\Big|_i^{2i} = (2i)^3 + 2i - i^3 - i =$$

$$= -8i + 2i + i - i = -6i.$$

3.2 Теорема Коши. Интегральная формула Коши.

Теорема 3.1. *(теорема Коши для односвязной области) Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D и C – замкнутый контур, принадлежащий области D, то интеграл не зависит от пути интегрирования и*

$$\oint_C f\,(z)dz = 0, \tag{3.4}$$

Определение 3.1. *Линия называется связной, если из любой ее точки можно пройти по этой линии в любую другую ее точку.*

Определение 3.2. *Порядком связности ограниченной области D называется число связных частей, на которое разбивается ее граница.*

Например, круг $|z| \leq 3$ – односвязная область, а кольцо $1 \leq |z| \leq 3$ – двусвязная область.

Теорема 3.2. *(теорема Коши для многосвязной области) Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной кривыми $L_0, L_1, \ldots, L_n$, то интеграл от $f(z)$ по внешнему контуру L_0 равен сумме интегралов по внутренним контурам при условии, что обход всех контуров совершается в одном направлении*

$$\int_{L_0} f\,(z)dz = \int_{L_1} f\,(z)dz + \ldots + \int_{L_n} f\,(z)dz, \tag{3.5}$$

где $L_0, L_1, \ldots, L_n$ обходится в одну сторону, например, против часовой стрелки (см. рис. 15).

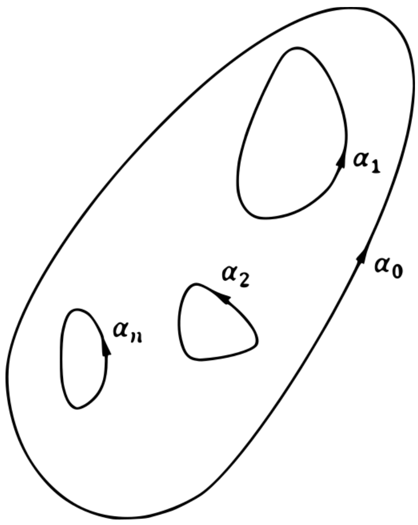


Рис. 15

Теорема 3.3. *(интегральная формула Коши) Если D – односвязная или многосвязная область, ограниченная контуром L, и $f(z)$ – однозначная и аналитическая в $\overline{D}$ функция, тогда для любой точки $z_0 \in D$ справедлива формула*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz. \qquad (3.6)$$

Теорема 3.4. *Если функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в $\overline{D}$, то во всех внутренних точках области у функции $f(z)$ существуют производные любого порядка, причем справедлива формула*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz, \qquad (3.7)$$

где $z_0 \in D$, а L – граница области D.

Формулой (3.7) можно пользоваться для вычисления некоторых интегралов.

Пример 3.3.

Вычислить интеграл $\int_L \frac{e^z}{z^2-4z}dz$, если

1) $L: |z-1| = \frac{1}{2}$, 2) $L: |z-1| = 2$, 3) $L: |z-1| = 4$.

Решение:

1) $L: |z-1| = \frac{1}{2}$. В замкнутой области, ограниченной окружностью $|z-1| = \frac{1}{2}$, подынтегральная функция аналитическая, т. к. точки, в которых знаменатель обращается в нуль $z_1 = 0$, $z_2 = 4$ не входят в область. Тогда по теореме Коши (3.1)

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z^2-4z} dz = 0.$$

2) $L: |z-1| = 2$. Внутри области, ограниченной окружностью $|z-1| = 2$, находится одна точка $z_1 = 0$, в которой знаменатель обращается в нуль. Перепишем интеграл в виде

$$\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2-4z} dz = \int_{|z-1|=2} \frac{\frac{e^z}{z-4}}{z} dz.$$

Функция $f(z) = \frac{e^z}{z-4}$ является аналитической в данной области.

Применяя интегральную формулу Коши $(z_0 = 0)$ (3.6), получим

$$\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2-4z} = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z-4}\right) \Big|_{z=0} = 2\pi i \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

3) $L: |z-1| = 4$. В области, ограниченной окружностью $|z-1| = 4$, имеем две точки $z_1 = 0$, $z_2 = 4$ в которых знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль. Применить сразу формулу (3.6) нельзя. Решить задачу можно двумя способами.

1 способ. Разложим дробь $\frac{1}{z^2-4z}$ на простейшие, получим

$$\frac{1}{z^2-4z} = \frac{A}{z-4} + \frac{B}{z},$$

Найдем A и B любым способом (например, методом неопределенных коэффициентов). $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, т.е.

$$\frac{1}{z^2-4z}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z}.$$

Подставляя в интеграл, получим

$$\int_{|z-1|=4}\frac{e^z}{z(z-4)}=\frac{1}{4}\int_{|z-1|=4}\frac{e^z}{z-4}dz-\frac{1}{4}\int_{|z-1|=4}\frac{e^z}{z}dz=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2\pi i(e^z)\,\Big|_{z=4}-\frac{1}{4}\cdot 2\pi i(e^z)\,\Big|_{z=0}=\frac{2\pi i}{4}(e^4-1)=\frac{\pi i(e^4-1)}{2}.$$

2 способ. Построим окружности c_1 и c_2 с центром в точках $z_1=0$ и $z_2=4$ настолько малых радиусов, чтобы окружности c_1 и c_2 не пересекались и целиком лежали в круге $|z-1|\le 4$. В трехсвязной области, ограниченной окружностями $|z-1|=4$, c_1 , c_2 подынтегральная функция аналитична. Тогда по теореме 3.2. Коши для многосвязной области (см. рис. 16)

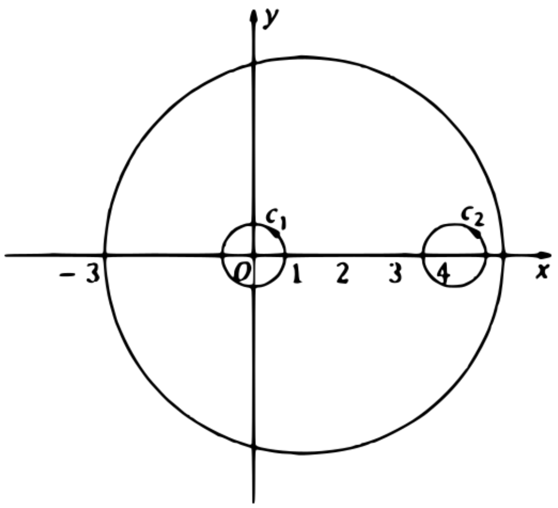


Рис. 16

$$\int_{|z-1|=4}\frac{e^z}{z(z-4)}dz=\int_{c_1}\frac{e^z}{z(z-4)}dz+\int_{c_2}\frac{e^z}{z(z-4)}dz.$$

К каждому интегралу в правой части применим интегральную формулу Коши (3.6). Получим

$$\int_{|z-1|=4} \frac{e^z}{z(z-4)} dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z-4}\right) |_{z=0} + 2\pi i \left(\frac{e^z}{z}\right) |_{z=4} =$$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi i \frac{e^z}{4} = \frac{\pi i (e^4 - 1)}{2}.$$

Получен тот же результат, что и первым способом.

Пример 3.4.

Вычислить интеграл $\int_{|z|=1} \frac{sin2z}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3} dz$

Решение: точка $z_0 = \frac{\pi}{4}$ принадлежит кругу $|z| < 1$. Применим формулу (3.7), $f(z) = sin2z$

$$\int_{|z|=1} \frac{sin2z}{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} (sin2z)'' |_{z=\frac{\pi}{4}} = 4\pi i(-sin2z) |_{z=\frac{\pi}{4}} = -4\pi i.$$

Тема 4. Ряды Тейлора и Лорана

4.1 Ряды Тейлора. Коэффициенты ряда. Разложение функции, аналитической в круге, в степенной ряд.

Определение 4.1. *Ряд вида*

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{4.1}$$

где c_n *и* z_0 *– комплексные постоянные, а* z *– комплексная переменная, называется степенным рядом в комплексной области.*

Область сходимости ряда (4.1) есть круг с центром в точке z_0 и радиусом R: $|z - z_0| < R$.

Теорема 4.1. *Функция* $f(z)$ *аналитична в круге* $|z - z_0| < R$, *разлагается в нем единственным образом в сходящийся к ней* *степенной ряд Тейлора*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{4.2}$$

коэффициенты которого c_n *вычисляются по формулам*

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\ \ (n=0,1,\dots), \tag{4.3}$$

где L *– окружность с центром* z_0 *, целиком лежащая в круге сходимости ряда* (4.2) $|z-z_0|<R$.

Радиус сходимости ряда (4.2) будет равен расстоянию от точки z_0 до ближайшей особой точки $f(z)$.

Имеют место следующие разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$.

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ R_{\text{сх}}=\infty, \tag{4.4}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R_{\text{сх}}=\infty, \tag{4.5}$$

$$cosz=1-\frac{z^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ R_{\text{сх}}=\infty, \tag{4.6}$$

$$ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n},\ R_{\text{сх}}=1, \tag{4.7}$$

$$(1+z)^\alpha=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\ldots,\ R_{\text{сх}}=1 \tag{4.8}$$

при $\alpha=-1$,

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots+(-1)^n z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ R_{\text{сх}}=1, \tag{4.9}$$

$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ R_{\text{сх}} = 1.$ (4.10)

Пример 4.1.

Разложить по степеням $(z-2)$ функцию $f(z) = \frac{1}{7-2z}$.

Решение: введем новую переменную $t = z - 2$, выразим $z = t + 2$ и подставим в функцию $f(z)$

$$f(t) = \frac{1}{7-2(t+2)} = \frac{1}{3-2t} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}t}$$

в точке $z = 2$ $(t = 0)$. Воспользуемся формулой (4.10), подставляя вместо $z \to \frac{2}{3}t$:

$$f(t) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}t} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3}t + \left(\frac{2}{3}t\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}t\right)^n + \ldots\right).$$

Сделаем обратную замену

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{2}{3}(z-2) + \frac{2^2}{3^2}(z-2)^2 + \ldots + \frac{2^n}{3^n}(z-2)^n + \ldots\right].$$

Этот ряд сходится при условии $\left|\frac{2}{3}(z-2)\right| < 1$, или $|z-2| < \frac{3}{2}$, т.е. радиус сходимости ряда $R = \frac{3}{2}$.

4.2 Ряд Лорана, его область сходимости.

Определение 4.2. *Рядом Лорана называется ряд вида*

$$\begin{gathered}\ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \\ + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},\end{gathered} \qquad (4.11)$$

Где z_0, c_n – комплексные постоянные, а z – комплексная перемен-

ная.

Ряд (4.11) сходится в области, в которой сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots \tag{4.12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots \tag{4.13}$$

Областью сходимости ряда (4.12) является внешность круга $|z-z_0| > r$. Областью сходимости ряда (4.13) является внутренность круга $|z-z_0| < R$.

Если $r < R$, то ряд (4.11) сходится в кольце $r < |z-z_0| < R$. Здесь $r \geq 0$, $0 < R < +\infty$.

Теорема 4.2. *Функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в кольце $r < |z-z_0| < R$ (не исключаются случаи $r = 0$ и $R = +\infty$) разлагается в этом кольце в ряд Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \\ = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{4.14}$$

где коэффициенты c_n находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \, (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \tag{4.15}$$

Здесь L – произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащей внутри данного кольца.

Определение 4.3. *В формуле* (4.11) *ряд* (4.12) *называется главной частью ряда Лорана, а ряд* (4.13) *– правильной частью ряда Лорана.*

На практике при нахождении коэффициентов c_n стараются избежать применения формул (4.15), так как они приводят к громоздким вычислениям.

Чаще используют готовые разложения в ряд Тейлора элементарных функций (4.4) – (4.10).

4.3 Примеры разложения функций в ряд Лорана

Пример 4.2.

Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = (z-3)^4 cos\frac{1}{z-3}$ в окрестности точки $z_0 = 3$.

Решение: сделаем замену $t = \frac{1}{z-3}$, получим $f(t) = \frac{1}{t^4} cost$. Используя разложение (4.6), получим

$$cos\frac{1}{z-3} = 1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \ldots,$$

тогда

$$f(z) = (z-3)^4 \left(1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \right.$$

$$\left. + \ldots\right) = (z-3)^4 - \frac{(z-3)^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!\,(z-3)^2} + \ldots$$

Это разложение справедливо для любой точки $z \neq 3$. В данном случае «кольцо» представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z = 3$. Его можно определить так: $0 < |z-3| < +\infty$. Здесь $r = 0$, $R = +\infty$. В указанной области $f(z)$ – аналитическая.

Пример 4.3.

Получить все разложения в ряд Лорана по степеням z функции $f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2}$.

Решение: Приравняем знаменатель дроби к нулю $z^2 + 3z + 2 = (z+2)(z+1) = 0$, отсюда $z_1 = -2$, $z_2 = -1$. Изобразим на комплексной плоскости возможные области. Для этого проведем окружности с центром в $z_0 = 0$ и радиусом равным расстоянию до ближайшей особой точки. Имеем три «кольца» с центром в точке $z_0 = 0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической:

1) круг $|z| < 1$,

2) кольцо $1 < |z| < 2$,

3) $2 < |z| < +\infty$ – внешность круга $|z| \leq 2$ (см. рис. 17)

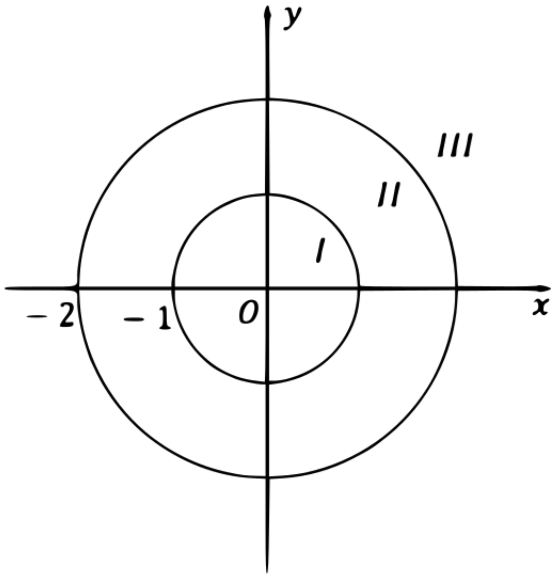


Рис. 17

Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждой из этих областей. Для этого представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2}. \qquad (4.16)$$

A и B нашли методом неопределенных коэффициентов.

1) Рассмотрим круг $|z| < 1$. Преобразуем $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}}.$$

Используя формулу (4.9), получим

$$f(z) = (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} - \dots\right) =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}z + \frac{5}{4}z^2 - \frac{9}{8}z^3 + \dots$$

Это разложение является рядом Тейлора функции $f(z)$, при этом ряд для функции $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots$ сходится при $|z| < 1$, а

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots \qquad (4.17)$$

сходится при $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ или $|z| < 2$, т.е. внутри круга $|z| < 1$ оба ряда сходятся.

2) Рассмотрим кольцо $1 < |z| < 2$. Ряд для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ остается сходящимся в этом кольце, т.е. $|z| < 2$, а ряд для функции $\frac{1}{1+z}$ расходится при $|z| > 1$. Поэтому преобразуем $f(z)$ следующим образом

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}}. \qquad (4.18)$$

Применяя формулу (4.9), получаем

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}}. \qquad (4.19)$$

Этот ряд сходится для $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, т.е. при $|z| > 1$. Подставляя (4.17), (4.19) в (4.18), получаем

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\ldots\right)+\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^2}{16}+\ldots+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^3}+\ldots$$

3) Рассмотрим $|z|>2$. Ряд (4.17) для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ при $|z|>2$ расходится, а ряд (4.19) для функции $\frac{1}{1+\frac{1}{z}}$ сходится, если $|z|>2$, то условие $|z|>1$ выполняется. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}.$$

Используя формулу (4.9), получим

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots\right)+\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\left(2-\frac{3}{z}+\frac{5}{z^2}-\frac{9}{z^3}\right)=\frac{2}{z}-\frac{3}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{9}{z^4}+\ldots$$

Т.е. для разных областей ряд Лорана функции $f(z)$ имеет разный вид.

<u>Пример 4.4.</u> Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{2z-1}{z^2+z-2}$ в окрестности $z_0=1$.

Решение: найдем особые точки функции $f(z)$, для этого приравняем знаменатель к нулю $z^2 + z - 2 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = -2$, т.е. разложение необходимо осуществить в окрестности особой точки $z_1 = 1$, т.е. в кольце $0 < |z - 1| < 3$. Число 3 найдено, как расстояние между центром разложения $z = 1$ и ближайшей особой

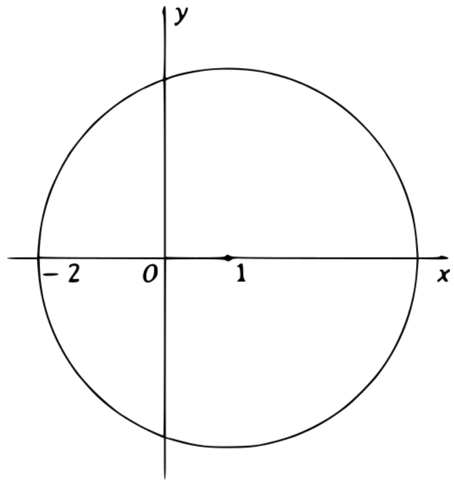


Рис. 18

точкой $z = -2$ (см. рис. 18).

Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{2z-1}{z^2+z-2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}.$$

Введем новую переменную $z - 1 = t$, т.е. $z = t + 1$ и перепишем функцию $\frac{1}{z+2} = \frac{1}{t+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}$. Используя разложение (4.9), получим

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{z-1}{3} + \frac{(z-1)^2}{9} - \frac{(z-1)^3}{27} + \ldots\right]$$

Область сходимости этого ряда $\left|\frac{z-1}{3}\right| < 1$ или $|z-1| < 3$. Таким образом, разложение в ряд Лорана в кольце $0 < |z-1| < 3$ имеет вид

$$f(z) = \frac{2z-1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3} - \frac{z-1}{9} + \frac{(z-1)^2}{27} - \frac{(z-1)^3}{81} + \ldots$$

Слагаемое $\frac{1}{z-1}$ является степенью $(z-1)^{-1}$ и поэтому не требует дальнейшего разложения.

Тема 5. Вычеты функций

5.1 Нули аналитической функции.

Определение 5.1. *Точка z_0 называется нулем -го порядка аналитической функции $f(z)$, если*

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(z_0) \neq 0, \qquad (5.1)$$

т.е. n – порядок первой не равной нулю производной.

Если $n = 1$, то точка z_0 называется простым нулем.

Теорема 5.1. *Точка z_0 является нулем -го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, тогда и только тогда, когда имеет место равенство*

$$f(z) = (z-z_0)^n \varphi(z) \qquad (5.2)$$

где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

<u>Пример 5.1.</u>

Найти нули функции и определить их порядки $f(z) = cosz - 1$.

Решение: приравняем $f(z)$ нулю, получим $cosz = 1$, откуда $z_n = 2\pi n$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ – нули данной функции.

Найдем

$$f'(z)\,|_{z=z_n} = -sinz\,|_{z=2\pi n} = 0,$$

$$f''(z)\,|_{z=z_n} = -cosz\,|_{z=2\pi n} = -1 \neq 0.$$

Согласно определению (5.1), $z_n = 2\pi n$ являются нулями второго порядка.

Пример 5.2.

Найти нули функции и определить их порядки $f(z) = z^8 - 9z^7$.

Решение: приравняем $f(z)$ нулю, получим $z^7(z-9) = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 9$. Можно воспользоваться определением (5.1), однако проще использовать теорему 5.1. Функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = z^7(z-9)$, но тогда $z = 0$ является нулем порядка 7, функцией $\varphi(z)$ является сомножитель $\varphi(z) = z - 9$, $\varphi(0) = -2 \neq 0$; $z = 9$, является нулем порядка 1, функцией $\varphi(z)$ в данном случае является $\varphi(z) = z^7$, $\varphi(9) = 9^7 \neq 0$.

5.2 Изолированные особые точки.

Определение 5.2. *Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции$f(z)$, если $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности этой точки, за исключением самой точки z_0.*

Определение 5.3. *Точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = C.$$

Пример 5.3.

Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1-e^{3z}}{z}$ и установить их тип.

Решение: особая точка функции $f(z)$ есть $z_0 = 0$. Вычислим

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{3z}}{z}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{-3z}{z}=-3.$$

т.е. $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

Определение 5.4. *Точка z_0 называется <u>полюсом</u> функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.*

Теорема 5.2. *Для того, чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$.*

Определение 5.5. *Точка z_0 называется <u>полюсом порядка n</u> $(n\ge 1)$ функции $f(z)$, если эта точка является нулем порядка n для функции $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$.*

Теорема 5.3. *Для того, чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в виде $f(z)=\frac{\varphi}{(z-z_0)^n}$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0)\ne 0$.*

<u>Пример 5.4.</u>

Найти особые точки функции $f(z)$ и установить их тип $f(z)=\frac{2z+1}{z^4-2z^3}$.

Решение: найдем нули функции $\frac{1}{f(z)}=\frac{z^2-2z^3}{2z+1}$, так как $z^4-2z^3=z^3(z-2)$, то функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет два нуля. $z_1=0$ – это нуль третьего порядка согласно формуле (5.2), а $z_2=2$ – нуль первого порядка, поэтому $f(z)$ можно представить в виде $\frac{\varphi(z)}{z^3}$, где $\varphi(z)=\frac{2z+1}{z-2}$, $\varphi(0)=-\frac{1}{2}\ne 0$. Или $f(z)$ можно представить в виде $\frac{\psi(z)}{z-2}$, где $\psi(z)=\frac{2z+1}{z^3}$, $\psi(2)=\frac{5}{8}\ne 0$. По теореме (5.3) $f(z)$ в точке $z=0$ имеет полюс третьего порядка, в точке $z=2$ – полюс первого порядка.

Теорема 5.4. *Если функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ и точка z_0 является нулем порядка m для функции $P(z)$ и нулем порядка l для функции $Q(z)$, то*

1. если $m > l$, то $n = m - l$ есть порядок нуля функции $f(z)$ в точке z_0,

2. если $m < l$, то $n = l - m$ есть порядок полюса функции $f(z)$ в точке z_0,

3. если $m = l$, то z_0 – устранимая особая точка.

Пример 5.5.

Найти особые точки функции $f(z)$ и установить их тип $f(z) = \frac{e^{z-3}-1}{(z-3)^2 z^4}$.

Решение: особыми точками функции $f(z)$ являются $z_1 = 3$ и $z_2 = 0$.

В точке $z_1 = 3$ числитель и знаменатель $f(z)$ обращаются в нуль. Для числителя $P(z) = e^{z-3} - 1$ число $z = 3$ является нулем 1 порядка, так как $P'(z)\,|_{z=3} = e^{z-3}\,|_{z=3} = 1$, то по определению 5.1 $z = 3$ – нуль 1-го порядка, т.е. в теореме 5.4 $m = 1$.

Знаменатель $Q(z) = (z-3)^2 z^4$ по теореме 5.1 в точке $z = 3$ имеет нуль 2-го порядка, т. е. $l = 2$. Следовательно по теореме 5.4 $l - m = 1$ – порядок полюса функции $f(z)$.

В точке $z = 0$ перепишем функцию в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^4}$, где $\varphi(z) = \frac{e^{z-3}-1}{(z-3)^2}$, $\varphi(0) = \frac{e^{-3}-1}{9}$, т.е. по теореме 5.3 $z = 0$ – полюс 4-го порядка. Окончательно $z = 3$ – полюс первого порядка, $z = 0$ – полюс 4-го порядка.

Определение 5.6. *Точка z_0 называется существенно особой точкой, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела $f(z)$: $\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.*

5.3 Классификация изолированных особых точек по

виду главной части ряда Лорана.

Теорема 5.5. *Точка z_0 является устранимой особой точкой, если в лорановом разложении $f(z)$ в окрестности точки z_0 отсутствует главная часть, т.е.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{5.3}$$

Теорема 5.6. *Точка z_0 является полюсом функции $f(z)$, если главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит конечное число слагаемых, т.е.*

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad (c_{-n} \neq 0)$$

наибольший из показателей степеней у разностей $(z - z_0)$, содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, равен порядку полюса.

Теорема 5.7. *Точка z_0 является существенно особой точкой для функции $f(z)$, если главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности z_0 содержит бесконечно много членов.*

В следующих примерах найти все особые точки данных функций и установить их тип.

<u>Пример 5.6.</u>

$f(z) = \frac{sin 3z}{z}$.

Решение: найдем особую точку $f(z)$: $z_0 = 0$, в этой точке функция не определена. Используя разложение в ряд Тейлора для функции $sinz$ (4.5) в окрестности точки $z_0 = 0$, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля

$$f(z) = \frac{1}{z}\left[(3z) - \frac{(3z)^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{(3z)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right] =$$

$$= 3 - \frac{9z^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{(3z)^{2n} \cdot 3}{(2n+1)!} + \ldots$$

Это разложение не содержит главной части. Поэтому точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

Пример 5.7.

$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^5}$.

Решение: используя разложение в ряд Тейлора для функции e^z в окрестности точки $z_0 = 0$, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля

$$f(z) = \frac{1}{z^5}\left[1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^2 3!} + \frac{1}{z4!} + \frac{1}{5!} + \frac{z}{6!} + \ldots$$

Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит конечное число членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является полюсом четвертого порядка, т. к. наибольший показатель степени у z , содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана равен четырем.

Пример 5.8.

$$f(z) = (z-2)^2 e^{\frac{1}{z-2}}.$$

Решение: используем разложение

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots$$

и полагая $t = \frac{1}{z-2}$, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности $z_0 = 2$

$$f(z) = (z-2)^2 \left[1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{3!(z-2)^3} + \right.$$

$$+\frac{1}{4!(z-2)^4}+\ldots\Big] = (z-2)^2 + (z-2) + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!(z-2)} +$$
$$+\frac{1}{4!(z-2)^2}+\ldots$$

Это разложение содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями $z-2$. Следовательно, точка $z_0 = 2$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

5.4 Вычеты функций.

Определение 5.7. *Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, обозначаемое символом $resf(z_0)$ и определяемое равенством*

$$resf(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f\,(z)dz, \tag{5.4}$$

где C – любой контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$, содержащий внутри себя единственную особую точку z_0 функции $f(z)$.

Из сравнения формулы для коэффициентов ряда Лорана (4.15) и (5.4) получаем

$$resf(z_0) = c_{-1}, \tag{5.5}$$

то есть справедлива

Теорема 5.5. *Вычетом* аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 является коэффициент при $(z-z_0)^{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана.

<u>Формулы для вычисления вычетов функции $f(z)$:</u>

1. если z_0 – правильная точка функции $f(z)$, то $resf(z_0) = 0$.

2. если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$, то $resf(z_0) = 0$.

3. если z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$resf(z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-z_0)^n]. \tag{5.6}$$

4. если z_0 – простой полюс $(n = 1)$, то

$$resf(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z - z_0)^n]. \qquad (5.7)$$

5. если $f(z)$ в окрестности точки z_0 представима как частное двух аналитических функций $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\Psi(z)}$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\Psi(z_0) = 0, \Psi'(z_0) \neq 0$, т.е. z_0 – простой полюс функции $f(z)$, то

$$resf(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\Psi'(z_0)}. \qquad (5.8)$$

6. если точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для нахождения необходимо найти коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 ($resf(z_0) = c_{-1}$).

<u>Пример 5.9.</u>

Найти вычеты функции в ее особых точках $f(z) = \frac{cosz-1}{z^2(z-\pi)}$.

Решение: особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_1 = 0$, $z_2 = \pi$.

В точке $z = 0$

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{cosz - 1}{z^2(z - \pi)} = \lim_{z \to 0} \frac{-z^2}{2z^2(z - \pi)} = \frac{1}{2\pi}.$$

Следовательно, $z = 0$ – устранимая особая точка и $\underset{z=0}{res} f(z) = 0$.

В точке $z = \pi$ имеем полюс первого порядка, так как $f(z)$ можно представить в виде (по теореме 5.3). Тогда по формуле (5.7)

$$\underset{z=\pi}{res} f(z) = \lim_{z \to \pi} \frac{(cosz - 1)(z - \pi)}{z^2(z - \pi)} = \frac{-1 - 1}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2}.$$

<u>Пример 5.10.</u>

Найти вычеты функции в ее особых точках $f(z) = \frac{z^2}{z^3+1}$.

Решение: особые точки функции $f(z)$ – нули знаменателя, т.е. корни уравнения $z^3 + 1 = 0$. Решая это уравнение, получим

$$z_k = e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{3}}, k = -1,0,1, \qquad (5.9)$$

т.е. $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ $(k = -1)$, $z_2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$ $(k = 0)$, $z_3 = e^{i\pi}$ $(k = 1)$ – нули первого порядка знаменателя, т.е. полюса первого порядка функции $f(z)$. Воспользуемся формулой (5.8)

$$\underset{z=z_k}{res} f(z) = \frac{z^2}{3z^2}\,|_{z=z_k} = \frac{1}{3},$$

т.е. вычеты по всех особых точках функции z_k из (5.9) равны $\frac{1}{3}$.

Пример 5.11.

Найти вычет функции в ее особой точке $f(z) = z^2 sin\frac{1}{z}$.

Решение: особая точка функции $f(z)$ есть точка $z = 0$. Она является существенно особой точкой функции $f(z)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно выписать лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = 0$, используя формулу (4.5)

$$f(z) = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \frac{1}{7!\,z^7} + \ldots\right) =$$
$$= z - \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{5!\,z^3} - \frac{1}{7!\,z^5} + \ldots$$

Оно содержит бесконечное число членов в главной части. Вычет функции в точке $z = 0$ есть коэффициент $c_{-1} = -\frac{1}{3!}$, т.е. $\underset{z=0}{res} f(z) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$.

Пример 5.12.

Найти вычет функции в ее особых точках $f(z) = \frac{1}{z^5 + 4z^3}$.

Решение: особые точки функции находятся из уравнения $z^5 + 4z^3 = 0$ или $z^3(z + 2i)(z - 2i) = 0$.

$z_1 = 0$ – полюс третьего порядка,

$z_{2,3} = \pm 2i$ – полюса первого порядка.

Найдем вычеты по формуле (5.7) в точках $z_2,\ z_3$

$$\underset{z=2i}{res} f(z) = \underset{z\to 2i}{lim} \frac{(z-2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(2i)^3 4i} = \frac{1}{32},$$

$$\underset{z=-2i}{res} f(z) = \lim_{z\to-2i} \frac{(z+2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(-2i)^3(-4i)} = \frac{1}{32},$$

и по формуле (5.6) в точке z_1

$$\underset{z=0}{res} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to0} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1\cdot z^3}{z^3(z^2+4)}\right] = \frac{1}{2} \lim_{z\to0} \frac{d}{dz}\left[-\frac{2z}{(z^2+4)^2}\right] =$$

$$= -\lim_{z\to0} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z^2+4)^2} = -\lim_{z\to0} \frac{-3z^2+4}{(z^2+4)^3} = -\frac{1}{16}.$$

Тема 6. Основная теорема о вычетах. Приложения вычетов

6.1 Основная теорема о вычетах.

Теорема 6.1. *Если функция $f(z)$ аналитична всюду внутри области, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, тогда*

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z}{res}_k f(z). \qquad (6.1)$$

Пример 6.1.

Вычислить интеграл $\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$.

Решение: особые точки подынтегральной функции определяются из уравнения $(z+2)^2(z^2+1) = 0$.

$z_1 = -2$ – полюс второго порядка,

$z_{2,3} = \pm i$ – полюса первого порядка (см. рис. 19).

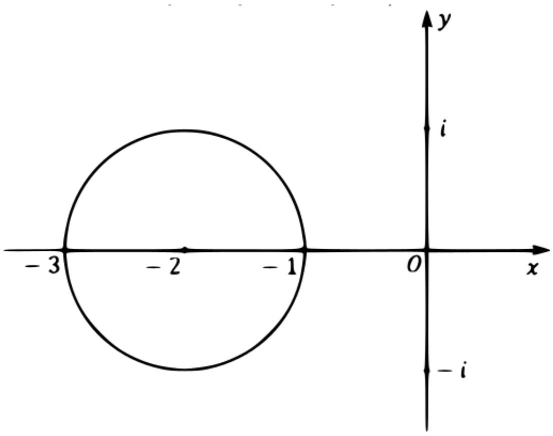


Рис. 19

Внутри окружности $|z+2|=1$ лежит одна точка $z=-2$, поэтому по основной теореме о вычетах

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = 2\pi i \cdot \underset{z=-2}{res} f(z). \tag{6.2}$$

Найдем $\underset{z=-2}{res} f(z)$ по формуле (5.6)

$$\underset{z=-2}{res} f(z) = \frac{1}{1!} \frac{\lim\limits_{z\to -2} d}{dz} \left[\frac{(z+2)^2}{(z+2)^2(z+i)(z-i)} \right] = \lim_{z\to -2} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = \frac{4}{25}.$$

Подставляя в (6.2), получим

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = \frac{8\pi i}{25}.$$

Пример 6.2.

Вычислить интеграл $\int_{|z-i|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$.

Решение: в области $D: |z-i|<2$ функция $f(z)=z^2 e^{\frac{1}{z}}$ имеет одну особую точку $z=0$. Это существенно особая точка, так как ее лорановское разложение в окрестности $z=0$ имеет вид (используем формулу (4.4))

$$f(z) = z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z^4} + \cdots \right) =$$
$$= z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} + \cdots$$

Оно содержит бесконечное число членов в главной части. Вычет в точке $z=0$ равен коэффициенту $c_1 = \frac{1}{3!}$, т.е. $res_{z=0} f(z) = \frac{1}{3!}$. По теореме 6.1

$$\int_{|z-i|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot res_{z=0} f(z) = \frac{2\pi i}{3!} = \frac{\pi i}{3}.$$

6.2 Вычет функции в бесконечно удаленной точке

Определение 6.1. Функция $f(z)$ аналитична в бесконечно удаленной точке $z = \infty$, если функция $g(\zeta) = \mathrm{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ аналитична в $\zeta = 0$.

Определение 6.2. Если $\zeta = 0$ – правильная, устранимая, полюс или существенно особая точка функции $g(\zeta)$, то точка $z = \infty$ называется правильной, устранимой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(z)$.

Определение 6.3. Вычетом аналитической функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ называется комплексное число, равное значению интеграла

$$res\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)dz \qquad (6.3)$$

по любому замкнутому контуру, проходимому по часовой стрелке, вне которого функция аналитична и не имеет особых точек, отличных от $z = \infty$, т.е.

$$res_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(z)dz, \qquad (6.4)$$

$$res_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Пример 6.3.

Найти вычет в $z = \infty$ для функции $f(z) = \cos z$.

Решение: сделаем замену $z = \frac{1}{\zeta}$, тогда лорановское разложение $\cos\zeta$ в окрестности точки $z = \infty$ $(\zeta = 0)$ имеет вид

$$g(\zeta) = \cos\frac{1}{\zeta} = 1 - \frac{1}{2!\,\zeta^2} + \frac{1}{4!\,\zeta^4} - \cdots,$$

т.е. $\zeta = 0$ – существенно особая точка. Для нахождения вычета воспользуемся (4.6)

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, \qquad (6.5)$$

Коэффициент c_{-1} в разложении $\cos z$ (6.5) равен нулю $c_{-1} = 0$, т.е. $res_{z=\infty} f(z) = 0$.

Теорема 6.2. Если функция $f(z)$ аналитична на полной комплексной плоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = \infty$, то

$$\sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f(z) = 0 \qquad (6.6)$$

или

$$res_{\infty} f(z) = -\sum_{k=1}^{n-1} res_{z_k} f(z). \qquad (6.7)$$

Формулой (6.7) удобно пользоваться при вычислении некоторых интегралов.

Пример 6.4.

Вычислить интеграл $I = \int_{|z|=4} \frac{dz}{z^6+9z\^4}$.

Решение: подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{z^6+9z^4}$ внутри окружности $|z| = 4$ имеет три особые точки $z_1 = 0$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3i$.

Использование основной теоремы о вычетах приводит к громоздким вычислениям. Удобнее воспользоваться формулой (6.7): $I = -2\pi i \cdot res_{\infty} f(z)$.

Выпишем лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$

$$f(z) = \frac{1}{z^6 + 9z^4} = \frac{1}{z^6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{9}{z^2}} = \frac{1}{z^6}\left(1 - \frac{9}{z^2} + \frac{81}{z^4} - \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^6} - \frac{9}{z^8} + \frac{81}{z^{10}} - \cdots$$

Коэффициент $c_1 = 0$, т.е. $res_{\infty} f(z) = 0$, следовательно

$$\int_{|z|=4} \frac{dz}{z^6 + 9z^4} = 0.$$

6.3 Вычисление несобственных интегралов.

1. Интегралы от рациональных функций.

Теорема 6.3. *Если* $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x)$, $Q(x)$ *– многочлены,* *причем все корни знаменателя комплексные и степень $Q(x)$ «m» хотя бы на две единицы больше степени $P(x)$ «n» $(m-n\geq 2)$, то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res_{z_k}F(z), \qquad (6.8)$$

где $F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ и z_k – полюсы функции $F(z)$, лежащие в верхней полуплоскости.

Пример 6.5.

Вычислить интеграл $I=\int_0^{\infty}\frac{z^2dx}{(x^2+a^2)^2}$ $(a>0)$.

Решение: подынтегральная функция $F(x)=\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$ – четная. Поэтому $I=\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$.

Введем функцию $F(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ (заменили переменную x на z). Т.е. на действительной оси при $z=x$ $F(z)=F(x)$. Функция $F(z)$ имеет две особые точки $z_1=ai$, $z_2=-ai$ – это полюса второго порядка. В верхней полуплоскости находится точка $z=ai, a>0$. Условия теоремы (6.3) для функции $F(z)$ выполнены, т.е. можно воспользоваться (6.8). Для этого необходимо вычислить $res_{z=ai}F(z)$. По формуле (6.8)

$$res_{z=ai}F(z)=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}[F(z)(z-ai)^2]=$$

$$=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z-ai)^2}{(z-ai)^2(z+ai)^2}\right]=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+ai)^2}=$$

$$=\lim_{z\to ai}\frac{2aiz}{(z+ai)^3}=\frac{2(ai)^2}{(2ai)^3}=\frac{1}{4ai}.$$

Подставим $res_{z=ai}F(z)=\frac{1}{4ai}$ в формулу (6.8)

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot res_{z=ai}F(z)=\frac{\pi i}{4ai}=\frac{\pi}{4a}.$$

2. Вычисление интегралов вида

$$\int_0^{\infty} R(x)\cos\alpha x\,dx,\ \int_0^{\infty} R(x)\sin\alpha x\,dx,$$

где $R(x)$ – правильная рациональная дробь, $\alpha > 0$ – любое вещественное число.

Лемма Жордана. Если функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости за исключением конечного числа изолированных особых точек и стремится в этой полуплоскости к нулю при $|z| \to \infty$, тогда при $\alpha > 0$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z)dz = 0\,,$$

где контур C_R – полуокружность $|z| = R$ в верхней полуплоскости (см. рис. 20).

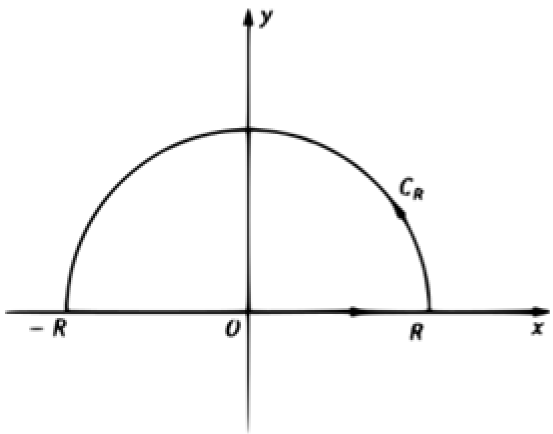


Рис. 20

Теорема 6.4. *Если функция $f(z)$, заданная на всей действительной оси, может быть продолжена на верхнюю полуплоскость и полученная функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана и не имеет особых точек на действительной оси, тогда при $\alpha > 0$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k}\left[f(z)e^{i\alpha z}\right] \qquad (6.9)$$

где z_k – особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

Так как согласно формуле Эйлера

$$e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x,$$

т.е. $\cos\alpha x = Re(e^{i\alpha x})$, $\sin\alpha x = Im(e^{i\alpha x})$, то (6.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx &= Im\left[2\pi i \textstyle\sum_{k=1}^{n} res_{z_k}\left(f(z)e^{i\alpha z}\right)\right],\\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx &= Re\left[2\pi i \textstyle\sum_{k=1}^{n} res_{z_k}\left(f(z)e^{i\alpha z}\right)\right],\end{aligned} \qquad (6.10)$$

$$(Im\, z_k > 0).$$

<u>Пример 6.6.</u>

Вычислить $I = \int_0^\infty \frac{x \sin 2x}{x^2+9} dx$.

Решение: введем вспомогательную функцию $F(z) = \frac{ze^{i2z}}{z^2+3^2}$. Если $z = x$, то $Im\, F(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x) = \frac{x \sin 2x}{x^2+9}$. Так как подынтегральная функция $f(x)$ четная, то

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+9} dx \tag{6.11}$$

Функция $\frac{z}{z^2+9}$ при стремлении $|z| \to \infty$ стремится к нулю и не имеет особых точек на действительной оси, т.е. удовлетворяет условиям леммы Жордана. По теореме 6.4, используя формулу (6.9), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+9} dx = 2\pi i \cdot res_{z=3i}\left(\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}\right). \tag{6.12}$$

$z = 3i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является простым полюсом.

$z = -3i$ – также особая точка $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим по формуле (5.7) вычет в точке $z = 3i$

$$res_{z=3i}\left(\frac{ze^{i2z}}{z^2+9}\right) = \lim_{z\to 3i} \frac{ze^{i2z}}{z^2+9}(z-3i) =$$

$$= \lim_{z\to 3i} \frac{ze^{i2z}}{z+3i} = \frac{3ie^{-6}}{6i} = \frac{1}{2e^6}.$$

Подставляя полученное значение в формулы (6.10), (6.11), (6.12), получим

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \cdot Im \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+9} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot Im\left[2\pi i \cdot res_{z=3i} \frac{\left(ze^{i2z}\right)}{z^2+9}\right] = \frac{1}{2} \cdot Im\left[2\pi i \frac{1}{2e^6}\right] = \frac{\pi}{2e^6}.$$

6.4 Теорема Руше.

Теорема 6.5. (Руше) *Если функции $f(z)$ и $g(z)$, аналитичные в* *замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной контуром Γ, во всех точках этого контура удовлетворяют неравенству*

$$|f(z)| > |g(z)|, \qquad (6.13)$$

то их сумма $F(z) = f(z) + g(z)$ и функция $f(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей (с учетом их кратности).

Пример 6.7.

Определить число корней уравнения $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$ внутри круга $|z| < 2$.

Решение: Положим $f(z) = -3z^3$, $g(z) = z^4 - 1$, $F(z) = f(z) + g(z) = z^4 - 3z^4 - 1$.

На окружности $|z| = 2$:

$$|f(z)|_{z=2} = |-3z^3|_{z=2} = 3 \cdot 8 = 24,$$
$$|g(z)|_{z=2} \leq |z^4|_{z=2} + 1 = 16 + 1 = 17,$$

т.е. во всех точках окружности $|z| = 2$ выполняется $|f(z)| > |g(z)|$. Функция $f(z) = -3z^3$ внутри круга $|z| < 2$ имеет три нуля, следовательно, по теореме Руше, и функция $F(z) = z^4 - 3z^4 - 1$ имеет три нуля внутри круга $|z| < 2$, т.е. уравнение $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$ имеет три корня внутри круга $|z| = 2$.

Пример 6.8.

Сколько корней уравнения

$$z^5 - 10z + 3 = 0 \qquad (6.14)$$

находится в кольце $1 < |z| < 2$.

Решение: обозначим N – число корней уравнения (6.14) в кольце $1 < |z| < 2$, N_1 – число корней уравнения (6.14) в круге $|z| < 2$, N_2 – число корней уравнения (6.14) в круге $|z| < 1$.

Понятно, что $N = N_1 - N_2$; $(N_1 \geq N_2)$.

Найдем N_1. Рассмотрим окружность $|z| = 2$. Положим $f(z) = z^5$, $g(z) = -10z + 3$. Уравнение (6.14) можно переписать в виде $F(z) = f(z) + g(z) = 0$ на окружности $|z| = 2$.

$|f(z)|_{|z|=2} = |z^5|_{|z|=2} = 32$, $|g(z)| = |-10z + 3| \leq |10z| + 3$, т.е. $|g(z)|_{|z|=2} \leq |10z|_{|z|=2} + 3 = 23$, следовательно $|f(z)|_{|z|=2} > |g(z)|_{|z|=2}$. Функция $f(z) = z^5$ в круге $|z| < 2$ имеет пять нулей, т.е. по теореме Руше $N_1 = 5$.

Найдем N_2. Рассмотрим окружность $|z| = 1$. Положим $f(z) = -10z$, $g(z) = z^5 + 3$. На окружности $|z| = 1$ имеем $|f(z)|_{|z|=1} > |g(z)|_{|z|=1}$, так как $|f(z)|_{|z|=1} = |-10z|_{|z|=1} = 10$, $|g(z)|_{|z|=1} = |z^5 + 3|_{|z|=1} \leq |z^5|_{|z|=1} + 3 = 4$.

Функция $f(z) = -10z$ в круге $|z| < 1$ имеет один нуль, следовательно по теореме Руше $F(z) = f(z) + g(z)$ имеет в круге $|z| < 1$ один нуль, т.е. $N_2 = 1$.
Число корней уравнения (6.14) в кольце $1 < |z| < 2$ будет равно $N = 5 - 1 = 4$.

6.5 Приложение вычетов к вычислению преобразования Лапласа.

Определение 6.4. *Оригиналом называется комплекснозначная функция $f(t)$, непрерывная на полуинтервале $(0, +\infty)$, за исключением быть может изолированных особых точек, если существует действительное число s_0 (показатель роста $f(t)$) такое, что интеграл*

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{6.15}$$

сходится при $s > s_0$, расходится при $s < s_0$.

Определение 6.5. *Преобразованием Лапласа называется интегральное преобразование, относящее оригиналу $f(t)$ его изображение $F(p)$*

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt, Re\, p > s_0. \tag{6.16}$$

Обозначается $f(t) \risingdotseq F(p)$ ($F(p)$ есть изображение $f(t)$).

Теорема 6.6. (следствие из теоремы обращения) *Если изображение $F(p)$ является правильной дробно-рациональной функцией, т.е.*

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} \tag{6.17}$$

где $A(p)$ и $B(p)$ – многочлены со степенью знаменателя большей *степени числителя и знаменатель имеет корни* $p_1, p_2, \dots, p_n$, *кратности* $r_1, r_2, \dots, r_n$, *то соответствующий оригинал*

$$f(t) = L^{-1}[F(p)] = \sum_{k=1}^{n} res_{p_k}\left[\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right]. \qquad (6.18)$$

В частном случае,

1) когда все корни знаменателя просты, т.е. $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 1$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}, \qquad (6.19)$$

2) если корни знаменателя сопряженные комплексные числа $p_1 = \alpha + i\beta, p_2 = \alpha - i\beta.$

Тогда

$$\begin{aligned} res_{(\alpha+i\beta)}F(p)e^{pt} + res_{\alpha-i\beta}F(p)e^{pt} = \\ = 2Re\, res_{\alpha+i\beta}F(p)e^{pt}. \end{aligned} \qquad (6.20)$$

В следующих двух примерах восстановить оригиналы.

Пример 6.9.

$F(p) = \frac{p}{(p+1)^2}$.

Решение: функция $F(p)$ имеет простые полюсы в точках $p_1 = 3i$, $p_2 = -3i, p_3 = 2$. По формуле (6.18)

$$f(t) = res_{p=3i}(F(p)e^{pt}) + res_{p=-3i}(F(p)e^{pt}) + res_{p=2}(F(p)e^{pt}),$$

так как $p_1 = 3i$ и $p_2 = -3i$ комплексно сопряженные, то

$$f(t) = 2Re\, res_{p=3i}(F(p)e^{pt}) + res_{p=2}(F(p)e^{pt}),$$

но $p_1 = 3i$ и $p_3 = 2$ – простые, поэтому применим формулу (6.19), обозначив

$A(p) = p^2, B(p) = (p^2 + 9)(p - 2) = p^3 - 2p^2 + 9p - 18,$

$B'(p) = 3p^2 - 4p + 9.$

Получим, используя формулу (6.20)

$$f(t) = 2Re\frac{(3i)^2e^{3ti}}{3(3i)^2-4(3i)+9} + \frac{2e^{2t}}{3\cdot 4-4\cdot 2+9} = 2Re\frac{3e^{3ti}}{6+4i} + \frac{2e^{2t}}{13} =$$

$$= Re\left[\frac{3}{13}(3-2i)(\cos 3t + i\sin 3t)\right] + \frac{2}{13}e^{2t} =$$

$$= \frac{3}{13}Re[(3\cos 3t + 2\sin 3t) + i(3\sin 3t - 2\cos 3t)] + \frac{2}{13}e^{2t} =$$

$$= \frac{3}{13}(3\cos 3t + 2\sin 3t) + \frac{2}{13}e^{2t}.$$

6.6 Вычисление интегралов Эйлера.

Определение 6.6. *Гамма-функцией или эйлеровым интегралом 2-го рода называется* $\Gamma(p)$, *определяемая равенством*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx, \tag{6.21}$$

где p *– любое комплексное число,* $Re\, p > 0$.

Основные свойства $\Gamma(p)$:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ – формула приведения
3. $\Gamma(n+1) = n!$
4. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ – формула дополнения, $0 < p < 1$
5. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Определение 6.7. *Бета-функция или Эйлеров интеграл 1-го рода определяется формулой (для* $p > 0,\, q > 0$*)*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx. \tag{6.22}$$

Свойства $B(p,q)$:

1. $B(p,q) = B(q,p)$

2. $B(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$

3. $B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Пример 6.11.

Вычислить $I=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx,\ a<0$.

Решение: сделаем замену $\frac{x^2}{a^2}=t$, т.е. $x=a\sqrt{t}$, $dx=\frac{a\,dt}{2\sqrt{t}}$, пределы интегрирования изменятся $x=0\Rightarrow t=0$, $x=a\Rightarrow t=1$. Подставляя в интеграл, получим

$$I=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=\int_0^1\frac{a^2t\sqrt{a^2-a^2t}}{2\sqrt{t}}a\,dt=\frac{a^4}{2}\int_0^t t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt.$$

Это есть Бета-функция. Найдем p и q, используя формулу (6.22): $p-1=\frac{1}{2}\Rightarrow p=\frac{3}{2}$, $q-1=\frac{1}{2}\Rightarrow q=\frac{3}{2}$.

$$I=\frac{a^4}{2}\int_0^t t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{a^4}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)},$$

но $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ по свойствам 2 и 5 $\Gamma(p)$, а $\Gamma(3)=2!$ по свойству 3$\Gamma(p)$.

$$I=\frac{a^4}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2}{2!}=\frac{a^4}{2}\frac{1}{4}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi a^4}{16}.$$

Пример 6.12.

Свести интеграл к вычислению $\Gamma(p)$-функции $I=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{20}dx$.

Решение: сделаем замену переменной $t=\ln\frac{1}{x}\Rightarrow x=e^{-t}$, $dx=-e^{-t}dt$, пределы интегрирования также изменятся

при $x\to 0^-$ $t\to+\infty$,

при $x=1$ $t=0$.

Интеграл примет вид

$$I = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{20} dx = -\int_{\infty}^{0} t^{20} e^{-t} dt = \Gamma(21).$$

Вычислим $\Gamma(21) = 20!$ (по свойству 3 Г-функции), т.е. $I = 20!$.

Пример 6.13.

Вычислить интеграл с помощью $\Gamma -$, $\mathrm{B} -$ функций $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^4 x \, dx$.

Решение: чтобы свести интеграл к B-функции, сделаем замену $t = \sin^2 x$, тогда $dx = \frac{dt}{2 \sin x \cos x}$, пределы интегрирования изменятся так:

$x = 0 \Rightarrow t = 0$,

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Интеграл примет вид

$$I = \int_0^1 \frac{t^4 (1-t)^2 dt}{2t^{\frac{1}{2}\sqrt{1-t}}} = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{4-\frac{1}{2}} (1-t)^{2-\frac{1}{2}} dt.$$

Найдем p и q в формуле (6.22):

$p - 1 = 4 - \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{9}{2}$,

$q - 1 = 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{5}{2}$.

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2} B\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2} + \frac{5}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(7)}.$$

Вычислим, используя свойства 2, 3, 5 Г-функции

$\Gamma(7) = 6!$,

$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) =$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2^2} \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2} \Gamma\left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) =$$

$$= \frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2^2} \sqrt{\pi} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{2^4} \sqrt{\pi}.$$

Окончательно,

$$I = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(7)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{2^4} \sqrt{\pi} \cdot \frac{3}{2^2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{7\pi}{2^{11}}.$$

Оглавление