

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Понятие определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Назовем *разбиением отрезка $[a, b]$* совокупность точек $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Точки x_k будем называть точками разбиения. В каждом из полученных отрезков разбиения $[x_k, x_{k+1}]$ выберем произвольную точку ξ_k . Символом Δx_k обозначим разность $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ (т.е. Δx_k – длина отрезка разбиения). Образует сумму

$$S_f = S_f(\tau, \xi) = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Эту сумму называют *интегральной суммой* (для) функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, соответствующей данному разбиению τ отрезка $[a, b]$ и данному выбору промежуточных точек ξ_k .

Для того чтобы выяснить геометрический смысл интегральной суммы σ_f , изобразим график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (рис. 1).

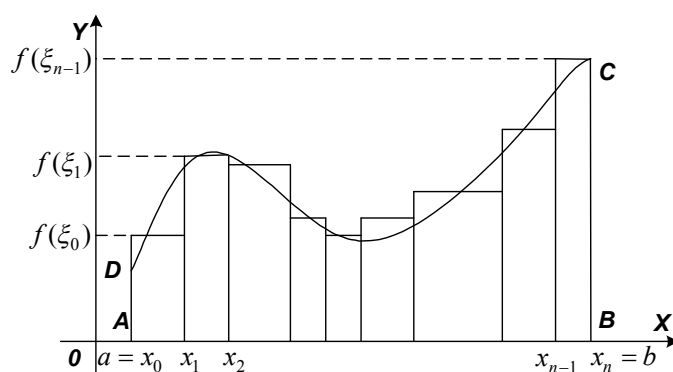


Рис. 1.

Ясно, что S_f – это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}$ и высотами $f(\xi_0), f(\xi_1), \dots, f(\xi_{n-1})$ соответственно (рис. 1 сделан для случая, когда $f(x) > 0$). Очевидно также, что σ_f представляет собой приближенное значение площади криволинейной трапеции $ABCD$ (рис. 1), и это приближенное значение тем точнее, чем «мельче» разбиение отрезка $[a, b]$ точками $x_0, x_1, \dots, x_n$. При этом площадь k -го прямоугольника на рис. 1 равна $f(\xi_k)\Delta x_k$.

Обозначим через d длину наибольшего отрезка разбиения, т.е. $d = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k$. Число d назовем мелкостью разбиения отрезка $[a, b]$.

Определение. Число I называется *пределом интегральных сумм* $S_f(\tau, \xi)$ при $d \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что для любого разбиения τ , у которого $d < \delta$, выполняется неравенство $|S_f(\tau, \xi) - I| < \varepsilon$ при произвольном выборе промежуточных точек ξ_k .

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* (по Риману) на отрезке $[a, b]$, если существует конечный предел

$$\lim_{d \rightarrow 0} S_f(\tau, \xi) = I.$$

При этом число I называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается символом

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Числа a и b называют *нижним* и *верхним* пределами интегрирования, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, а x – *переменной интегрирования*.

Замечание. В отличие от неопределенного интеграла, определенный интеграл представляет собой *число*, а не функцию.

Если интеграл существует, то это число определяется однозначно и зависит только от вида функции $f(x)$ и от чисел a и b .

Отсюда, в частности, следует, что определенный интеграл не зависит от выбора обозначения для переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du \text{ и т.д.}$$

Вычисление определенного интеграла в соответствии с приведенным определением связано с трудностями и громоздкими подсчетами. Поэтому чаще используют другие подходы, о которых будет говориться ниже.

Пусть функция $f(x)$ является интегрируемой на отрезке $[a, b]$ функцией. В этом случае будем писать $f(x) \in L[a, b]$. Здесь $L[a, b]$ обозначает множество всех интегрируемых на $[a, b]$ функций.

Свойства определенного интеграла

Сначала расширим понятие определенного интеграла. В определении интеграла мы считали, что $a < b$. Распространим это определение на случаи $a = b$ и $a > b$, полагая

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

1) Аддитивность интеграла. Для любых чисел a, b, c имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(Предполагается, что интегралы, входящие в эту формулу, существуют.)

Суть доказанного свойства состоит в том, что определенный интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по его частям.

2) Линейность интеграла. Если $f(x) \in L[a, b]$ и $g(x) \in L[a, b]$, то для любых $\alpha, \beta \in R$ функция $\alpha f(x) + \beta g(x) \in L[a, b]$.

При этом справедливо равенство

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

В частности,

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha f(x) dx &= \alpha \int_a^b f(x) dx \quad (\text{при } \beta = 0), \\ \int_a^b f(x) + g(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (\text{при } \alpha = \beta = 1) \end{aligned}$$

3) Монотонность интеграла. Если $f(x), g(x) \in L[a, b]$ и $f(x) \leq g(x)$ для $\forall x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

В частности, если $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

4) Оценки интеграла. Если $f(x) \in L[a, b]$ и $\forall x \in [a, b]: m \leq f(x) \leq M$, то справедливы неравенства

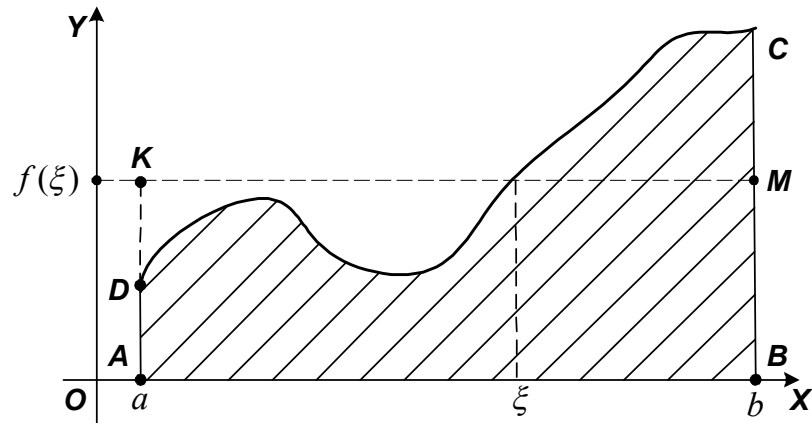
$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

Теорема о среднем значении

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует число $c \in [a, b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Теорема о среднем имеет простой геометрический смысл: существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что площадь криволинейной трапеции $ABCD$ равна площади прямоугольника $ABMK$, имеющего высоту $f(\xi)$ и основание $b - a$



Интеграл с переменным верхним пределом

Сейчас будет получена основная формула интегрального исчисления, которая устанавливает связь между понятиями определенного интеграла и неопределенного, а точнее, первообразной.

До сих пор мы рассматривали определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования a и b . Очевидно, что при изменении одного из пределов (например, верхнего) величина интеграла будет изменяться.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Если $f \in L[a, b]$, то $f(x)$ интегрируема по любой части этого отрезка, и поэтому $\forall x \in [a, b]$ существует интеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

называемый *интегралом с переменным верхним пределом*.

Значение функции $\Phi(x)$ раскрывает следующая теорема.

Теорема о дифференцируемости определенного интеграла по переменному пределу. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$,

то функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ дифференцируема в любой внутренней точке x этого отрезка ($a < x < b$), причем справедливо равенство

$$\Phi'(x) = f(x), \quad \text{т.е.} \quad \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Имеет место аналогичное равенство:

$$\left(\int_x^b f(t) dt \right)' = -f(x)$$

Доказательство. Зафиксируем любое значение $x \in (a, b)$ и придадим ему приращение $\Delta x \neq 0$ столь малое, чтобы точка $x + \Delta x$ лежала внутри отрезка $[a, b]$, т.е. $a \leq x + \Delta x \leq b$. Тогда $\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt$. Найдем производную функции $\Phi(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \end{aligned}$$

Теперь к полученному интегралу применим теорему о среднем значении:

$$\Delta \Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c) \Delta x,$$

где $c \in [x, x + \Delta x]$, если $\Delta x > 0$ (или $c \in [x + \Delta x, x]$, если $\Delta x < 0$). Отсюда

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = f(c).$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $c \rightarrow x$ при $\Delta x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x).$$

Поэтому

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x).$$

Теорема доказана.

Замечание. Таким образом, установлено следующее утверждение:

Любая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную, а именно, функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Поскольку всякая другая первообразная для функции $f(x)$ может отличаться от указанной функции $\Phi(x)$ только на постоянную, то получена связь между неопределенным и определенным интегралами в виде:

$$\int f(x) dx = \int_a^x f(t) dt + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Формула Ньютона-Лейбница

Последняя теорема не только указывает на связь между понятиями неопределенного и определенного интеграла, но и дает практический способ вычисления определенных интегралов в случае, когда подынтегральная функция непрерывна.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то справедлива следующая формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – произвольная первообразная для функции $f(x)$.

Эта формула называется **формулой Ньютона-Лейбница**.

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем и, значит, существует $\int_a^b f(x) dx$.

Далее, в силу непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ у нее на этом отрезке существует первообразная (см. последнее Замечание).

Более того, в последней теореме было доказано, что функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ является одной из первообразных для функции $f(x)$; следовательно, для любой первообразной $F(x)$ имеем

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Отметим, что это равенство выполняется тождественно, т.е. $\forall x \in [a, b]$.

Поскольку $\Phi(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ и $\Phi(a) = F(a) + C$, то $C = -F(a)$.

Следовательно, $\Phi(x) = F(x) - F(a)$, в частности, $\Phi(b) = F(b) - F(a)$. Но

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx, \text{ откуда и получаем формулу Ньютона-Лейбница.}$$

Разность $F(b) - F(a)$ принято условно записывать в виде $F(x)|_a^b$, поэтому формула Ньютона-Лейбница в общепринятой краткой записи выглядит следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b.$$

Методы вычисления определенных интегралов

Поскольку формула Ньютона-Лейбница сводит задачу вычисления определенного интеграла от непрерывной функции к нахождению первообразной, то методы вычисления неопределенных интегралов сводятся к вычислению определенных интегралов.

Два основных метода нахождения неопределенных интегралов: метод замены переменной и интегрирование по частям - с учетом специфики определенных интегралов приобретают следующие формы.

Замена переменной в определенном интеграле. Пусть

- 1) функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$;
- 2) $a \leq \varphi(t) \leq b$ для $\forall t \in [\alpha, \beta]$;
- 3) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$.

Тогда справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Для доказательства этого равенства достаточно применить к обеим его частям формулу Ньютона-Лейбница и учесть, что если $F(x)$ первообразная для $f(x)$, то функция $\Phi(t) = F(\varphi(t))$ будет первообразной для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Пример. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt =$

$$= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Интегрирование по частям для определенного интеграла. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Справедливость этой формулы следует из равенства $(uv)' = u'v + uv'$ и применения формулы Ньютона-Лейбница к интегралу от функции $u'v + uv'$, для которой первообразной будет функция uv .

Пример. $\int_0^2 x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = e^x dx \\ du = dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = x e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx =$

$$= 2e^2 - 0 - e^x \Big|_0^2 = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Определенные интегралы имеют многочисленные приложения в самых разнообразных задачах. Здесь мы ограничимся рассмотрением некоторых геометрических приложений.

1. Вычисление площади плоской области

а) Площадь криволинейной трапеции

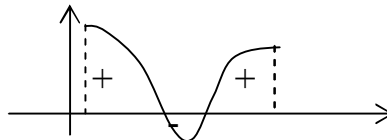
Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – отрезком с оси x , а по бокам – прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Обоснование этой формулы было дано при введении понятия определенного интеграла.

Если график функции расположен ниже оси Ox , т.е. $f(x) < 0$, то площадь трапеции имеет знак “-“, а если график расположен выше оси Ox , т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+”.

В более общем случае, как на следующем рисунке,

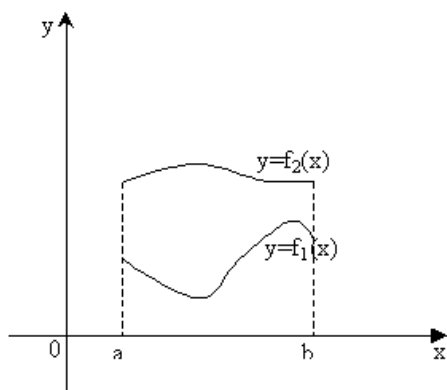


определенный интеграл от $f(x)$ на $[a, b]$ равен сумме площадей частей изображенной области, которые лежат выше оси Ox , и минус площади тех частей области, которые лежат ниже оси Ox .

Если верхняя граница криволинейной трапеции задана уравнениями в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t) \geq 0$, $\alpha \leq t \leq \beta$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то произведем формуле площади криволинейной трапеции замену переменных, полагая $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$.

Тогда получим формулу площади криволинейной трапеции, заданной в параметрическом виде:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$



Более общая задача – найти площадь плоской области, ограниченной двумя непрерывными линиями – графиками функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (см. рис.).

Легко понять, что такая площадь находится по следующей формуле:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx,$$

где S – площадь криволинейной плоской области, ограниченной графиками функций $y = f_2(x)$, $y = f_1(x)$ таких, что $f_2(x) \geq f_1(x)$ на $[a, b]$, и по бокам – отрезками прямых $x = a$ и $x = b$.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

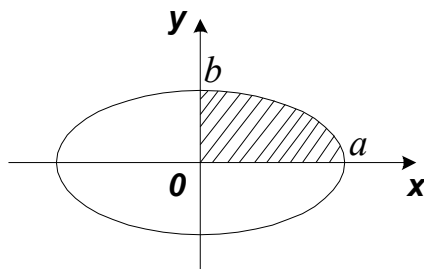


Рис.

Решение. Эллипс симметричен относительно осей координат, поэтому достаточно вычислить площадь части фигуры, находящейся в I четверти. Следовательно, искомая площадь равна

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (a \cos t)' dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \\ &= 2ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab. \end{aligned}$$

В частности, если полуоси эллипса равны ($a = b = R$), то получаем известную формулу площади круга πR^2 .

б) Площадь криволинейного сектора

Пусть кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, причем функция $\rho(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Плоскую фигуру, ограниченную дугой AB этой кривой и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β ($\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$), называют *криволинейным сектором* (см. рис.).

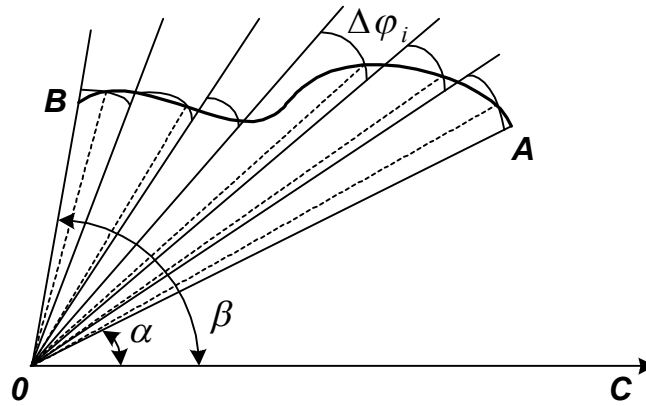


Рис.

Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\phi) d\phi.$$

Доказательство. Разобьем произвольно отрезок $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$ на n частей, выберем на каждом частичном отрезке $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ произвольно точку ξ_i ($\varphi_i \leq \xi_i \leq \varphi_{i+1}$) и построим круговые секторы с радиусами $\rho(\xi_i)$.

В результате получим веерообразную фигуру, площадь которой приближенно равна площади S криволинейного сектора:

$$S \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \rho^2(\xi_i) \Delta\varphi_i,$$

где $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$. В правой части стоит интегральная сумма для искомого интеграла. Так как функция $\rho^2(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, то предел этой суммы при $d = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta\varphi_i\} \rightarrow 0$ существует и равен этому интегралу.

С другой стороны, при $d \rightarrow 0$ указанное приближение будет становиться все точнее и точнее, так что записанная интегральная сумма будет стремиться к площади криволинейного сектора. Таким образом,

$$S = \frac{1}{2} \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho^2(\xi_i) \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда: $\rho = a\varphi$, где a – положительное число.

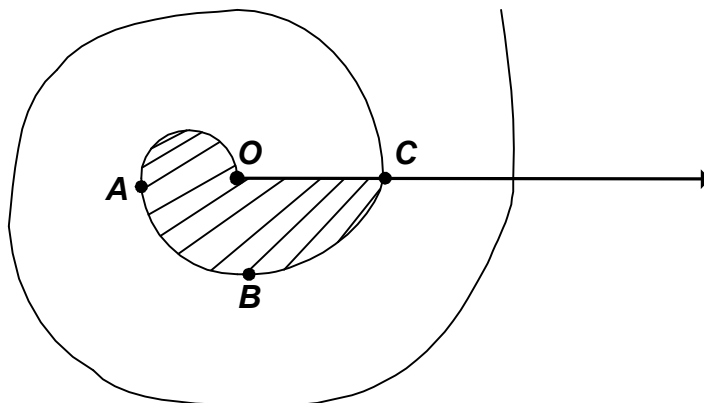


Рис.

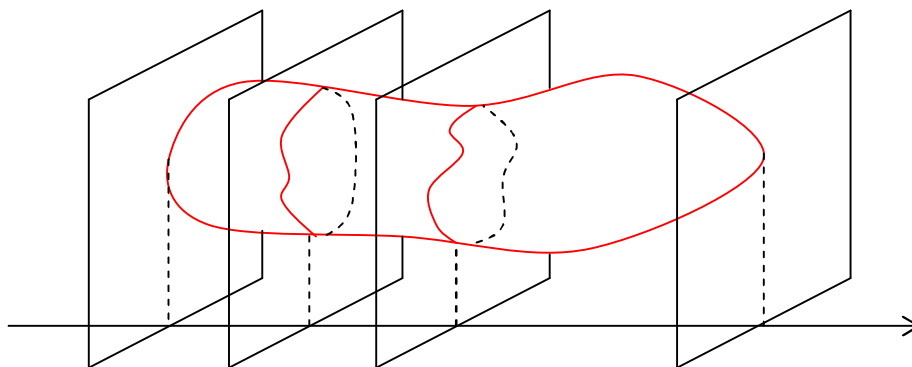
При изменении φ от 0 до 2π полярный радиус описывает кривую, ограничивающую криволинейный сектор $OABC$ (см. рис.). Поэтому по формуле площади криволинейного сектора имеем

$$S_{OABC} = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} \frac{8\pi^3}{3} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2.$$

Замечание. Расстояние от точки C до полюса равно $\rho = 2\pi a$. Поэтому круг радиуса OC имеет площадь $\pi \cdot OC^2 = 4\pi^3 a^2 = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi^3 a^2 = 3S_{OABC}$, т.е. площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда, равна $1/3$ площади круга с радиусом, равным наибольшему из полярных радиусов витка. К этому выводу пришел еще Архимед.

2. Нахождение объема тела, используя площади его поперечных сечений

Пусть имеется тело объема V . Пусть дана площадь любого поперечного сечения тела в виде непрерывной функции $Q = Q(x)$.



Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка $[a, b]$. Т.к. на каком-либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция $Q(x)$ непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i .

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x , то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i \Delta x_i$ и $m_i \Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$. При стремлении к нулю шага разбиения d , эти суммы имеют общий предел:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x) dx.$$

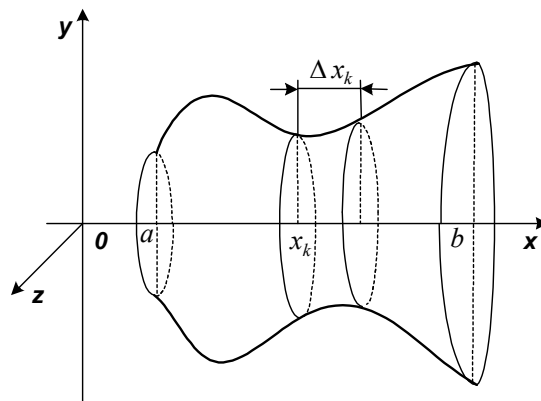
Таким образом, объем данного тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x) dx,$$

где $Q(x)$ – площадь поперечного сечения тела в точке x .

Объем тела вращения

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Найдем объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = a$, $y = b$, $x = 0$, вокруг оси x .



В данном случае поперечное сечение в точке x представляет собой круг радиуса $f(x)$, площадь которого равна $\pi f^2(x)$. Применяя к нахождению объема этого тела общую формулу, полученную выше, получаем:

Объем тела вращения, образованного вращением графика функции $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, вокруг оси Ox находится по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$