**Исследование функции по первой производной**

*Условия постоянства, убывания и возрастания функции*

***Теорема 1.*** Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[a,b\right]$ , дифференцируема на $\left(a,b\right) и f^{'}\left(x\right)=0 при ∀x\in \left(a,b\right) $, то $f\left(x\right)=0 $на отрезке $\left[a,b\right]$.

*Доказательство:* Возьмём для $∀x\in \left(a,b\right)$ и запишем для интервала $\left(a,x\right)$ теорему Лагранжа

$$f\left(x\right)-f\left(a\right)=f^{'}\left(ξ\right)∙\left(x-a\right) , где a<ξ<x$$

но так как $f^{'}\left(ξ\right)=0, $ то $f\left(x\right)-f\left(a\right)=0 => f\left(x\right)=f\left(a\right)=const$,

откуда в силу произвольности выбора точки $x\in \left(a,b\right)$ следует, что $y=f(x)$ постоянна на всём отрезке$\left[a,b\right].$ $∎$

***Теорема 2.*** Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[a,b\right]$ , дифференцируема на $\left(a,b\right) и f^{'}\left(x\right) при ∀x\in \left(a,b\right)$ сохраняет знак, то

1. если $f^{'}\left(x\right)>0, то $функция $y=f(x)$ возрастает на интервале $\left(a,b\right)$

2. если $f^{'}\left(x\right)<0, то $функция $y=f(x)$ убывает на интервале $\left(a,b\right)$

*Доказательство:* Пусть $x\_{1} и x\_{2}\in \left(a,b\right) и x\_{1}< x\_{2}, $ тогда по теореме Лагранжа

$$f\left(x\_{2}\right)-f\left(x\_{1}\right)=f^{'}\left(ξ\right)∙\left(x\_{2}-x\_{1}\right) , где x\_{1}<ξ<x\_{2}$$

Знак разности функций слева совпадает со знаком производной $f^{'}\left(ξ\right)$, откуда и следует

1. если $f^{'}\left(x\right)>0, то $ $f\left(x\_{2}\right)-f\left(x\_{1}\right)>0 => f\left(x\_{2}\right)>f\left(x\_{1}\right) =>$

функция $y=f(x)$ возрастает на интервале $\left(a,b\right)$

2. если $f^{'}\left(x\right)<0, то $ $f\left(x\_{2}\right)-f\left(x\_{1}\right)<0 => f\left(x\_{2}\right)<f\left(x\_{1}\right) =>$

функция $y=f(x)$ убывает на интервале $\left(a,b\right)$ $∎$

**Определение 1.** Точки, в которых производная функции обращается в нуль, называются стационарными точками функции.

**Определение 2.** Точки, в которых производная функции равна нулю, бесконечности или не существует вовсе, называются критическими точками функции.



$x\_{1} , x\_{2}, x\_{3} , x\_{4},x\_{5} ,x\_{6}$ критические точки,

$x\_{1} , x\_{4}, x\_{6}$ стационарные е точки

*Локальный экстремум функции*

**Определение 3.**

Точка $x\_{0}$ называется точкой локального максимума функции $y=f(x)$, если $∃ δ>0 : ∀x \left|x-x\_{0}\right|<δ => f\left(x\right)<f(x\_{0}) $ .

**Определение 4.**

Точка $x\_{0}$ называется точкой локального минимума функции $y=f(x)$, если $∃ δ>0 : ∀x \left|x-x\_{0}\right|<δ => f\left(x\right)>f(x\_{0}) $ .

**Определение 5.** Точки максимума и минимума функции $y=f(x)$ называются точками экстремума функции.

***Теорема 3.****(необходимое условие экстремума функции)*

Если точка $x\_{0} $ экстремум функции $y=f(x)$ $ $, то $f^{'}\left(x\_{0}\right)=0$ , или $f^{'}\left(x\_{0}\right)=\infty $ , или не существует вовсе.

Другими словами, экстремум функции ищется **лишь** в её критических точках.

Эта теорема, однако, не дает достаточного условия существования экстремума. Так на приведённом рисунке точки $x\_{1} , x\_{2}, x\_{3} , x\_{4},x\_{5} ,x\_{6}$ критические точки, точки $x\_{1} , x\_{2}, x\_{3} , x\_{4}-$ экстремум, а в точках $x\_{5} ,x\_{6}$ экстремума нет.

***Теорема 4.****(достаточное условие экстремума функции)*

Если функция $y=f(x)$ определена и дифференцируема в окрестности точки $x\_{0}$, где точка $x\_{0}-$ критическая точка функции, причем при переходе через точку $x\_{0}$ производная функции меняет знак , то

1. если знак производной функции $f^{'}\left(x\right)$ меняется с «+» на «$-$», то точка $x\_{0}-$ точка локального максимума функции.

2. если знак производной функции $f^{'}\left(x\right) $меняется с «$-$» на «+», то точка $x\_{0}-$ точка локального минимума функции.

*Доказательство:* 1. если знак меняется производной функции $f^{'}\left(x\right)$ с «+» на «$-$» , то это означает, что возрастание функции слева от точки $x\_{0}$ сменяется на убывание функции справа от точки $x\_{0}$ , следовательно, точка $x\_{0}-$ точка локального максимума функции.

2. если знак меняется производной функции $f^{'}\left(x\right)$ с «$-$» на «+», то это означает, что убывание функции слева от точки $x\_{0}$ сменяется на возрастание функции справа от точки $x\_{0}$ , следовательно, точка $x\_{0}-$ точка локального минимума функции.

**Замечание 1**. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то в этой точке нет экстремуму функции.

Теперь можем сформулировать

*Правила отыскания локального экстремума функции*

( по первой производной: ищутся экстремумы функции $y=f(x)$ $ $в конечном или бесконечном интервале и функция$ y=f(x)$ $ $ в этом интервале предполагается непрерывной.)

**1 шаг:** находим производную функции $ $ $f^{'}\left(x\right)$

находим стационарные точки функции $y=f(x)$,( т.е. приравниваем производную к нулю и находим корни уравнения $f^{'}\left(x\right)=0$

присоединяем к найденным стационарным точкам те, в которых $f^{'}\left(x\right)=\mp \infty и $

те, к которых производная не существует, $∄f^{'}\left(x\right)$

таким образом, находим все критические точки функции $y=f(x)$

**2 шаг:** отмечаем на оси $ Ox$ все критические точки функции $y=f(x)$ и составляем схему изменения знака производной функции $y^{'}=f^{'}\left(x\right)$ в интервалах между критическими точками функции

**3 шаг:** на основании схемы делаем вывод о интервалах убывания или возрастания функции.

**4 шаг:** на основании схемы делаем вывод о характере критических точек. Если нужно, можно построить схематический график.

*Пример 1.* Исследовать функцию $y=x^{3}-3x+2$ $ $ и построить схематический график.

**1 шаг:** находим производную функции $ $ $f^{'}\left(x\right)=3x^{2}-3$

находим стационарные точки функции $f^{'}\left(x\right)=0$

$$3x^{2}-3=0 => x\_{1}=-1 и x\_{2}=1 $$

точек, в которых $f^{'}\left(x\right)=\mp \infty , нет и $точек, в которых производная не существует, тоже нет.

таким образом, все критические точки нашей функции $x\_{1}=-1 и x\_{2}=1 $

**2 шаг:** отмечаем на оси $ Ox$ все критические точки функции $y=f(x)$ и составляем схему изменения знака производной функции $y^{'}=f^{'}\left(x\right)$ в интервалах между критическими точками функции



**3 шаг:** на основании схемы делаем вывод о интервалах убывания или возрастания функции



$$x\in \left(-\infty ; -1\right)∪\left(1; +\infty \right) функция возрастает$$

$$x\in \left(-1; 1\right) функция убывает$$

**4 шаг:** на основании схемы делаем вывод о характере критических точек.

$$x\_{1}=-1- точка локального максимума функции$$

$$ и x\_{2}=1- точка локального минимума функции $$



построить схематический график.

*Пример 2.* Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{\left(x-1\right)^{2}}$ $ $ и построить схематический график.

**1 шаг:** находим производную функции $ $ $f^{'}\left(x\right)=\frac{2}{3\sqrt[3]{\left(x-1\right)}}$

находим стационарные точки функции $f^{'}\left(x\right)=0$

$$f^{'}\left(x\right)=\frac{2}{3\sqrt[3]{\left(x-1\right)}}=0 => точек, в которых производная равна нулю нет $$

находим точки, в которых $f^{'}\left(x\right)=\mp \infty , => x\_{1}=1 $

$ в точке x\_{1}=1 график функции меет вертикальную касательную $

точек, в которых производная не существует, нет.

таким образом, все критические точки нашей функции $x\_{1}=1 $

**2 шаг:** отмечаем на оси $ Ox$ все критические точки функции $y=f(x)$ и составляем схему изменения знака производной функции $y^{'}=f^{'}\left(x\right)$ в интервалах между критическими точками функции



**3 шаг:** на основании схемы делаем вывод о интервалах убывания или возрастания функции



**4 шаг:** на основании схемы делаем вывод о характере критических точек

$$ x\_{1}=1- точка локального минимума функции $$



построить схематический график

*Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке*

Рассмотрим функцию$ y=f(x)$ $ $ определенную и непрерывную на отрезке $\left[a,b\right]$ .

Ставится задача: найти наибольшее и наименьшее значение функции$ y=f(x)$ $ $ на отрезке $\left[a,b\right]$.

В силу теоремы Вейерштрасса непрерывная функция на отрезке $\left[a,b\right]$ достигает в некоторой точке отрезка своего наименьшего( и наибольшего) значения. Рассмотрим, например, нахождение наибольшего значения функции на отрезке $\left[a,b\right]. $ Если наибольшее значение достигается во внутренней точке отрезка, то это точка одного из локальных максимумов функции.

Если наибольшее значение достигается **не** во внутренней точке отрезка, то это точка одного из концов отрезка$\left[a,b\right]$.

Вывод: Для нахождения наибольшего значения функции$ y=f(x)$ $ $ на отрезке $\left[a,b\right]$ сравниваются между собой значения функции $y=f(x)$ во всех точках локального максимума и в граничных точках отрезка $\left[a,b\right]$, выбирается наибольшее – это и есть искомое значение.

Вывод: Для нахождения наименьшего значения функции$ y=f(x)$ $ $ на отрезке $\left[a,b\right]$ сравниваются между собой значения функции $y=f(x)$ во всех точках локального минимума и в граничных точках отрезка $\left[a,b\right]$, выбирается наименьшее – это и есть искомое значение.

**Замечание 1**. Если сравнить значения функции$ y=f(x)$ во **всех** критических точках функции$ y=f(x)$ $ $ на отрезке $\left[a,b\right]$ с значениями функции на концах отрезка $\left[a,b\right]$($ с f(a)$ и$ f(b)$ ), то наибольшее и наименьшее значения и есть искомые величины. В этом случаи мы избегаем дополнительного исследования критических точек на экстремум.

**Замечание 1**. Если функции$ y=f(x)$ имеет на отрезке $\left[a,b\right]$ лишь **одну** точку локального экстремума, то без сравнения со значениями функции на концах отрезка $\left[a,b\right]$($ с f(a)$ и$ f(b)$ ) можно утверждать, что в этой точке достигается наибольшее ( наименьшее) значение функции$ y=f(x)$ на отрезке $\left[a,b\right].$

*Пример 3.* Найти наибольшее и наименьшее значение функции$ y=sinx^{2}$ $ $ на отрезке $\left[-\sqrt{π},\frac{\sqrt{5π}}{2}\right]$.

Ищем критические точки данной функции.

$$y^{'}=2∙x∙cosx^{2}=0 => $$

$$ критические точки\left( стационарные \right) x\_{1}=0 и x\_{2}=\sqrt{\frac{π}{2}} и x\_{3}=-\sqrt{\frac{π}{2}} $$

Сравниваем значение функции$ $ во **всех** критических точках функции$ y=sinx^{2}$ $ $ на отрезке $\left[-\sqrt{π},\frac{\sqrt{5π}}{2}\right]$ с значениями функции на концах отрезка $\left[-\sqrt{π},\frac{\sqrt{5π}}{2}\right]$, имеем

$$f\left(0\right)=0 , f\left(\sqrt{\frac{π}{2}}\right)=1 , f\left(-\sqrt{\frac{π}{2}}\right)=1 , f\left(-\sqrt{π}\right)=0 ,f\left(\frac{\sqrt{5π}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} $$

Выбираем наибольшее и наименьшее значения

$$ =>наибольшее значение функции y=sinx^{2} на отрезке \left[-\sqrt{π},\frac{\sqrt{5π}}{2}\right] равно 1$$

$$ f\left(\sqrt{\frac{π}{2}}\right)=1 , f\left(-\sqrt{\frac{π}{2}}\right)=1, в точках x\_{2}=\sqrt{\frac{π}{2}} и x\_{3}=-\sqrt{\frac{π}{2}}$$

$$=>наименьшее значение функции y=sinx^{2}на отрезке \left[-\sqrt{π},\frac{\sqrt{5π}}{2}\right] равно-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{5π}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} в точке x=b=\frac{\sqrt{5π}}{2} .$$