**Исследование функции по первой производной**

*Условия постоянства, убывания и возрастания функции*

***Теорема 1.*** Если функция непрерывна на отрезке , дифференцируема на , то на отрезке .

*Доказательство:* Возьмём для и запишем для интервала теорему Лагранжа

но так как то ,

откуда в силу произвольности выбора точки следует, что постоянна на всём отрезке

***Теорема 2.*** Если функция непрерывна на отрезке , дифференцируема на сохраняет знак, то

1. если функция возрастает на интервале

2. если функция убывает на интервале

*Доказательство:* Пусть тогда по теореме Лагранжа

Знак разности функций слева совпадает со знаком производной , откуда и следует

1. если

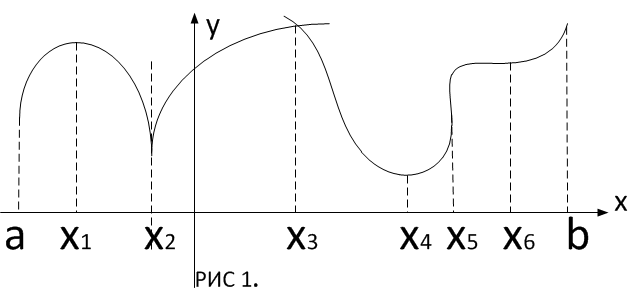
функция возрастает на интервале

2. если

функция убывает на интервале

**Определение 1.** Точки, в которых производная функции обращается в нуль, называются стационарными точками функции.

**Определение 2.** Точки, в которых производная функции равна нулю, бесконечности или не существует вовсе, называются критическими точками функции.



критические точки,

стационарные е точки

*Локальный экстремум функции*

**Определение 3.**

Точка называется точкой локального максимума функции , если .

**Определение 4.**

Точка называется точкой локального минимума функции , если .

**Определение 5.** Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума функции.

***Теорема 3.****(необходимое условие экстремума функции)*

Если точка экстремум функции , то , или , или не существует вовсе.

Другими словами, экстремум функции ищется **лишь** в её критических точках.

Эта теорема, однако, не дает достаточного условия существования экстремума. Так на приведённом рисунке точки критические точки, точки экстремум, а в точках экстремума нет.

***Теорема 4.****(достаточное условие экстремума функции)*

Если функция определена и дифференцируема в окрестности точки , где точка критическая точка функции, причем при переходе через точку производная функции меняет знак , то

1. если знак производной функции меняется с «+» на «», то точка точка локального максимума функции.

2. если знак производной функции меняется с «» на «+», то точка точка локального минимума функции.

*Доказательство:* 1. если знак меняется производной функции с «+» на «» , то это означает, что возрастание функции слева от точки сменяется на убывание функции справа от точки , следовательно, точка точка локального максимума функции.

2. если знак меняется производной функции с «» на «+», то это означает, что убывание функции слева от точки сменяется на возрастание функции справа от точки , следовательно, точка точка локального минимума функции.

**Замечание 1**. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то в этой точке нет экстремуму функции.

Теперь можем сформулировать

*Правила отыскания локального экстремума функции*

( по первой производной: ищутся экстремумы функции в конечном или бесконечном интервале и функция в этом интервале предполагается непрерывной.)

**1 шаг:** находим производную функции

находим стационарные точки функции ,( т.е. приравниваем производную к нулю и находим корни уравнения

присоединяем к найденным стационарным точкам те, в которых

те, к которых производная не существует,

таким образом, находим все критические точки функции

**2 шаг:** отмечаем на оси все критические точки функции и составляем схему изменения знака производной функции в интервалах между критическими точками функции

**3 шаг:** на основании схемы делаем вывод о интервалах убывания или возрастания функции.

**4 шаг:** на основании схемы делаем вывод о характере критических точек. Если нужно, можно построить схематический график.

*Пример 1.* Исследовать функцию и построить схематический график.

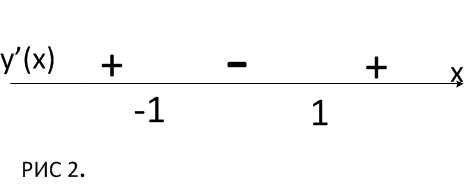
**1 шаг:** находим производную функции

находим стационарные точки функции

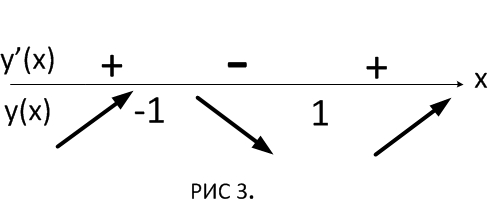
точек, в которых точек, в которых производная не существует, тоже нет.

таким образом, все критические точки нашей функции

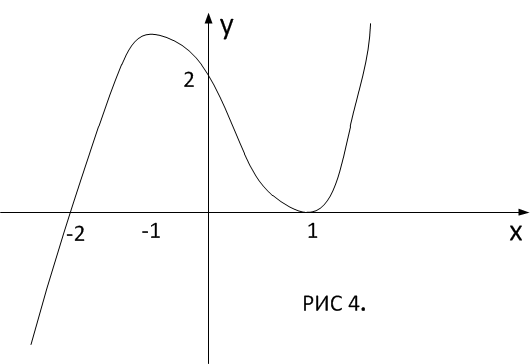
**2 шаг:** отмечаем на оси все критические точки функции и составляем схему изменения знака производной функции в интервалах между критическими точками функции



**3 шаг:** на основании схемы делаем вывод о интервалах убывания или возрастания функции



**4 шаг:** на основании схемы делаем вывод о характере критических точек.



построить схематический график.

*Пример 2.* Исследовать функцию и построить схематический график.

**1 шаг:** находим производную функции

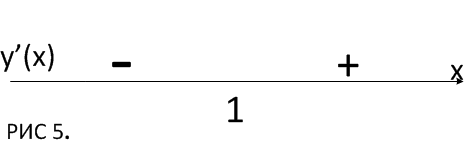
находим стационарные точки функции

находим точки, в которых

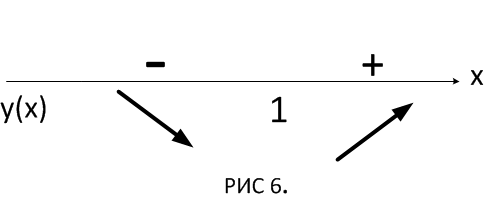
точек, в которых производная не существует, нет.

таким образом, все критические точки нашей функции

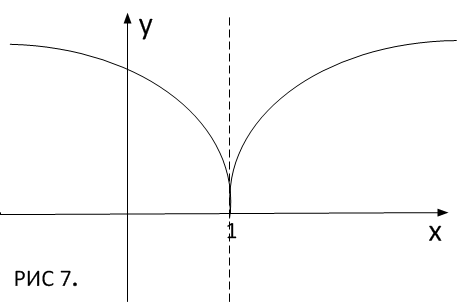
**2 шаг:** отмечаем на оси все критические точки функции и составляем схему изменения знака производной функции в интервалах между критическими точками функции



**3 шаг:** на основании схемы делаем вывод о интервалах убывания или возрастания функции



**4 шаг:** на основании схемы делаем вывод о характере критических точек



построить схематический график

*Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке*

Рассмотрим функцию определенную и непрерывную на отрезке .

Ставится задача: найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке .

В силу теоремы Вейерштрасса непрерывная функция на отрезке достигает в некоторой точке отрезка своего наименьшего( и наибольшего) значения. Рассмотрим, например, нахождение наибольшего значения функции на отрезке Если наибольшее значение достигается во внутренней точке отрезка, то это точка одного из локальных максимумов функции.

Если наибольшее значение достигается **не** во внутренней точке отрезка, то это точка одного из концов отрезка.

Вывод: Для нахождения наибольшего значения функции на отрезке сравниваются между собой значения функции во всех точках локального максимума и в граничных точках отрезка , выбирается наибольшее – это и есть искомое значение.

Вывод: Для нахождения наименьшего значения функции на отрезке сравниваются между собой значения функции во всех точках локального минимума и в граничных точках отрезка , выбирается наименьшее – это и есть искомое значение.

**Замечание 1**. Если сравнить значения функции во **всех** критических точках функции на отрезке с значениями функции на концах отрезка ( и ), то наибольшее и наименьшее значения и есть искомые величины. В этом случаи мы избегаем дополнительного исследования критических точек на экстремум.

**Замечание 1**. Если функции имеет на отрезке лишь **одну** точку локального экстремума, то без сравнения со значениями функции на концах отрезка ( и ) можно утверждать, что в этой точке достигается наибольшее ( наименьшее) значение функции на отрезке

*Пример 3.* Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке .

Ищем критические точки данной функции.

Сравниваем значение функции во **всех** критических точках функции на отрезке с значениями функции на концах отрезка , имеем

Выбираем наибольшее и наименьшее значения