Тема 9 Исследование функции по первой производной

9.1 Условия постоянства, убывания и возрастания функции

Th1. Если функция $y = f(x)$ 1)непрерывна на отрезке $[a, b]$ 2)дифференцируема на (a, b) 3) $f'(x) = 0$ при $\forall x \in (a, b)$, то $f(x) = const$ на отрезке $[a, b]$.

Доказательство: Возьмём $\forall x \in (a, b)$ и запишем для интервала (a, x) теорему Лагранжа

$$f(x) - f(a) = f'(\xi) \cdot (x - a)\ , \quad \text{где} \quad a < \xi < x$$

так как $f'(\xi) = 0,$ то $f(x) - f(a) = 0$ => $f(x) = f(a) = const,$

из произвольности выбора точки $x \in (a, b)$ следует, что $y = f(x)$ постоянна на всём отрезке$[a, b]$. ч.т.д. Место для формулы.

Th2. Если функция $y = f(x)$ 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$,

2) дифференцируема на (a, b), 3) $f'(x)$ при $\forall x \in (a, b)$ сохраняет знак, то

1. если $f'(x) > 0,$ то функция $y = f(x)$ возрастает на интервале (a, b)

2. если $f'(x) < 0,$ то функция $y = f(x)$ убывает на интервале (a, b)

Доказательство: Пусть x_1 и $x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$, тогда по теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)\ , \quad \text{где} \quad x_1 < \xi < x_2$$

Знак разности функций слева совпадает со знаком производной $f'(\xi)$, откуда и следует

1. если $f'(x) > 0,$ то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ => $f(x_2) > f(x_1)$ =>

функция $y = f(x)$ возрастает на интервале (a, b)

2. если $f'(x) < 0,$ то $f(x_2) - f(x_1) < 0$ => $f(x_2) < f(x_1)$ =>

функция $y = f(x)$ убывает на интервале (a, b) ■

<u>Def1.</u> Точки, в которых производная функции обращается в нуль, называются стационарными точками функции.

Матан 1-БМ-2020-ТР

<u>Def2.</u> Точки, в которых производная функции равна нулю, бесконечности или не существует вовсе, называются критическими точками функции.

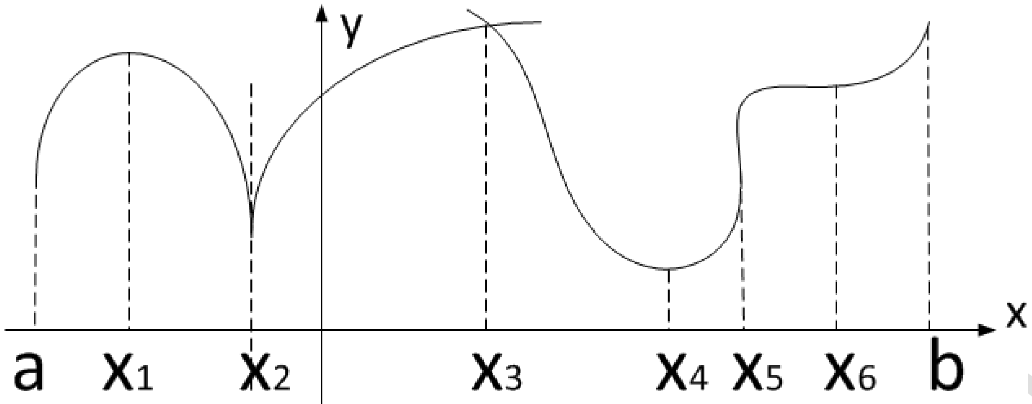

РИС 1.

x_1 , x_2, x_3 , x_4, x_5 , x_6 критические точки,

x_1 , x_4, x_6 стационарные е точки

9.2 Локальный экстремум функции

<u>Def3</u> Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $y = f(x)$, если $\exists\, \delta > 0 \quad : \quad \forall x \qquad |x - x_0| < \delta \;=>\; f(x) < f(x_0)$.

<u>Def4</u> Точка x_0 называется точкой локального минимума функции $y = f(x)$, если $\exists\, \delta > 0 \quad : \quad \forall x \qquad |x - x_0| < \delta \;=>\; f(x) > f(x_0)$.

<u>Def5</u> Точки максимума и минимума функции $y = f(x)$ называются точками экстремума функции.

Th2(необходимое условие экстремума функции*)*

Если точка $x_0 -$ экстремум функции $y = f(x)$, то 1) $f'(x_0) = 0$, или 2)$f'(x_0) = \infty$ или 3) $f'(x_0)$ не существует.

То есть, экстремум функции ищется лишь в её критических точках.

Th2 не дает достаточного условия существования экстремума. Так на рис.1 точки x_1 , x_2, x_3 , x_4, x_5 , x_6 – критические точки, точки x_1 , x_2, x_3 , x_4 – экстремум, а в точках x_5 , x_6 экстремума нет.

Matan 1-BM-2020-TP

Th3.*(*достаточное условие экстремума функции*)*

Если функция $y = f(x)$ определнная и дифференцируемая в окрестности точки x_0, где точка x_0 — критическая точка функции, причем при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак , то

1). если знак производной функции $f'(x)$ меняется с «+» на «−», то точка x_0 — точка локального максимума функции.

2). если знак производной функции $f'(x)$ меняется с «−» на «+», то точка x_0 — точка локального минимума функции.

Доказательство: 1). если знак производной функции $f'(x)$ меняется с «+» на «−» , то это означает, что возрастание функции слева от точки x_0 сменяется на убывание функции справа от точки x_0 , т.е. точка x_0 — точка локального максимума функции.

2). если знак производной функции $f'(x)$ меняется с «−» на «+», то это означает, что убывание функции слева от точки x_0 сменяется на возрастание функции справа от точки x_0 , т.е., точка x_0 — точка локального минимума функции.

Замечание 1. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то в этой точке нет экстремуму функции.

9.3 Правила отыскания локального экстремума функции по первой

производной.

(ищем экстремумы функции $y = f(x)$ в конечном или бесконечном интервале и функция $y = f(x)$ в этом интервале предполагается непрерывной.)

1 шаг: находим производную функции $f'(x)$, приравниваем производную к нулю и ищем корни уравнения $f'(x) = 0$.

присоединяем к найденным стационарным точкам те, в которых $f'(x) = \mp\infty$ и

те, к которых производная не существует, $\nexists f'(x)$

Матан 1-ВМ-2020-ТР

таким образом, находим все критические точки функции $y = f(x)$

2 шаг: отмечаем на оси Ox все критические точки функции $y = f(x)$ и составляем схему изменения знака производной функции $y' = f'(x)$ в интервалах между критическими точками функции

3 шаг: на основании схемы делаем вывод о интервалах убывания или возрастания функции.

4 шаг: на основании схемы делаем вывод о характере критических точек. Если нужно, можно построить схематический график.

Пример 1. Исследовать функцию $y = x^5 - 5x + 2$ и построить схематический график.

1 шаг: находим производную функции $f'(x) = 5x^4 - 5$

находим стационарные точки функции $f'(x) = 0$

$$5x^4 - 5 = 0 \quad => \quad x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 1$$

точек, в которых $f'(x) = \mp\infty$, нет и точек, в которых производная не существует, тоже нет.

таким образом, все критические точки нашей функции $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$

2 шаг: отмечаем на оси Ox все критические точки функции $y = f(x)$ и составляем схему изменения знака производной функции $y' = f'(x)$ в интервалах между критическими точками функции

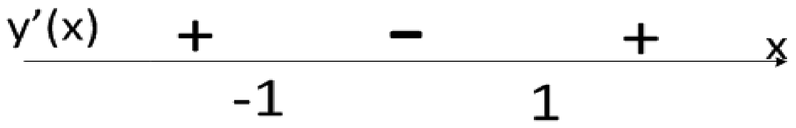

РИС 2.

3 шаг: на основании схемы делаем вывод о интервалах убывания или возрастания функции

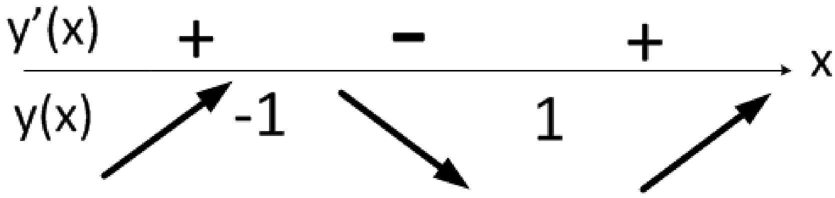

РИС 3.

Интервал возрастания :$x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$. Интервал убывания : $x \in (-1;\ 1)$

4 шаг: на основании схемы на рис 3. делаем вывод о характере критических точек.

$x_1 = -1 -$ точка локального максимума функции

и $x_2 = 1 -$ точка локального минимума функции

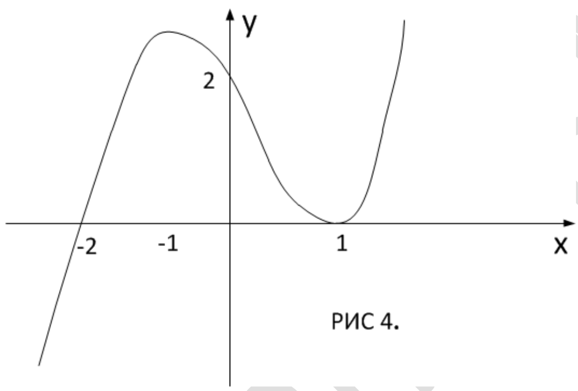

РИС 4.

построить схематический график.

Пример 2. Исследовать функцию $y = 4\sqrt[3]{(x-1)^2}$ и построить схематический график.

1 шаг: находим производную функции $f'(x) = \frac{8}{3\sqrt[3]{(x-1)}}$

стационарные точки функции найдем, приравняв $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{8}{3\sqrt[3]{(x-1)}} = 0 \quad => \quad \text{точек, в которых производная равна } \textit{нулю} \text{ нет}$$

найдем точки, в которых $f'(x) = \mp\infty, => \quad x_1 = 1$

в точке $x_1 = 1$ у графика функции вертикальная касательная

Точек, в которых производная не существует, нет.

То есть все критические точки исходной функции   это $x_1 = 1$

2 шаг: отмечаем на оси Ox все критические точки функции $y = f(x)$ и составляем схему изменения знака производной функции $y' = f'(x)$ в интервалах между критическими точками функции

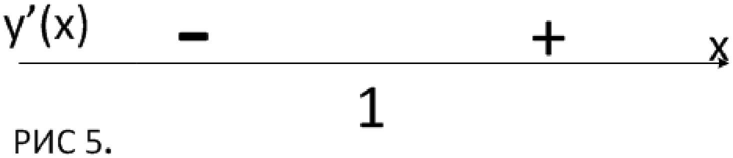

РИС 5.

3 шаг: на основании рис.5 делаем вывод об интервалах убывания и возрастания функции

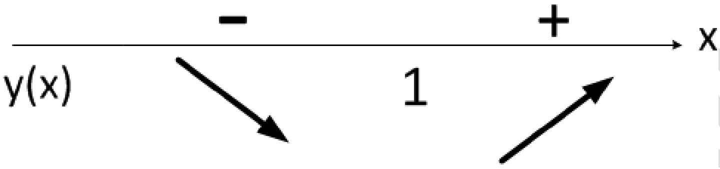

РИС 6.

4 шаг: на основании схемы на рис.5 делаем вывод о характере критических точек:

$$x_1 = 1 - \text{ точка локального минимума функции}$$

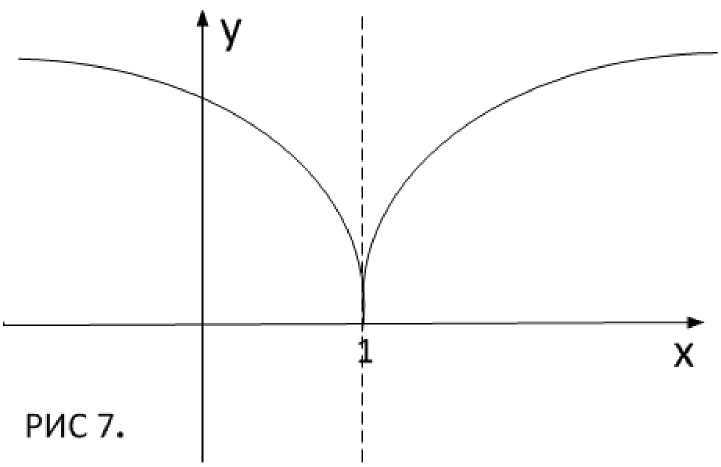

РИС 7.

схематический график функции приведен не рис.7

9.4 Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Рассматривается функция $y = f(x)$ определенная и непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Ставится задача отыскания наибольшего и наименьшего значения

функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

В силу теоремы Вейерштрасса непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ достигает в некоторой точке отрезка своего наименьшего (и наибольшего) значения. Рассмотрим, например, нахождение наименьшего значения функции на отрезке $[a, b]$. Если наименьшее значение достигается во внутренней точке отрезка, то это точка одного из локальных минимумов функции.

Если наименьшее значение достигается не во внутренней точке отрезка, то это точка одного из концов отрезка$[a, b]$.

Вывод1: Для нахождения наименьшего значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ сравниваются между собой значения функции $y = f(x)$ во всех точках локального минимума и в граничных точках отрезка $[a, b]$, выбирается наименьшее – это и есть искомое значение.

Вывод2:Аналогично для нахождения наибольшего значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ сравниваются между собой значения функции $y = f(x)$ во всех точках локального максимума и в граничных точках отрезка $[a, b]$, выбирается наибольшее – это и есть искомое значение.

Замечание 1. Если сравнить значения функции $y = f(x)$ во **всех** критических точках функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ со значениями функции на концах отрезка $[a, b]$($f(a)$ и $f(b)$), то наибольшее и наименьшее значения и есть искомые величины. В этом случаи мы избегаем дополнительного исследования критических точек на экстремум.

Замечание 1. Если функции $y = f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ лишь одну точку локального экстремума, то без сравнения со значениями функции на концах отрезка $[a, b]$($f(a)$ и $f(b)$) можно утверждать, что в этой точке достигается наибольшее (наименьшее) значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Матан 1-ВМ-2020-ТР

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3sinx^2$ на отрезке $\left[-\sqrt{\pi}, \frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right]$.

Ищем критические точки данной функции.

$$y' = 6 \cdot x \cdot cosx^2 = 0 \ =>$$

$$\text{критические точки(стационарные)} \ \ x_1 = 0 \ \text{ и } \ x_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{и} \quad x_3 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Сравниваем значение функции во **всех** критических точках функции $y = sinx^2$ на отрезке $\left[-\sqrt{\pi}, \frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right]$ со значениями функции на концах отрезка $\left[-\sqrt{\pi}, \frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right]$, имеем

$$f(0) = 0 \ , f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 3 \ , \qquad f\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 3 \, , f(-\sqrt{\pi}) = 0 \ , f\left(\frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Выбираем наибольшее и наименьшее значения

$$=> \text{наибольшее значение функции } y = sinx^2 \ \text{ на отрезке } \left[-\sqrt{\pi}, \frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right] \ \text{ равно } 3$$

$$f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 3 \ , \qquad f\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 3, \text{в точках } \ x_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{и} \quad x_3 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$=> \text{наименьшее значение функции } y = sinx^2 \text{на отрезке } \left[-\sqrt{\pi}, \frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right] \text{ равно } -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{в точке } \ x = b = \frac{\sqrt{5\pi}}{2} \ .$$

Матан 1-ВМ-2020-ТР