Тема 8 Формула Тейлора.

8.1 Многочлен Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки a и имеет производные до n-го порядка включительно в самой точке a. Найдем многочлен степени $\leq n$ $T_n(x)$, принимающий в точке a одинаковые значения с функцией и её производными до n-го порядка включительно. То есть ищем такой многочлен для данной функции $y = f(x)$, чтобы значение функции и всех её производных в точке a совпадало со значениями многочлена

$$T_n(x) = f(a), \quad T_n'(x) = f'(a), \quad \dots \quad , T_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(a)$$

Этот многочлен будет близок к функции $y = f(x)$ в окрестности точки a.

Многочлен $T_n(x)$ будем искать в виде

$$T_n(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-a) + a_2 \cdot (x-a)^2 + \cdots + a_n \cdot (x-a)^n$$

Коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ определим из условий равенства значения функции и всех её производных в точке a со значениями многочлена и всех его производных в точке a .

$a_0 = T_n(a) = f(a) \quad => \quad \boldsymbol{a_0 = f(a) = \frac{f(a)}{0!}}$

$$T_n'(x) = a_1 + 2a_2 \cdot (x-a)^1 + \cdots + na_n \cdot (x-a)^{n-1}$$

$a_1 = T_n'(a) = f'(a) \quad => \quad \boldsymbol{a_1 = f'(a) = \frac{f'(a)}{1!}}$

$$T_n''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 \cdot (x-a)^1 \dots + n(n-1)a_n \cdot (x-a)^{n-2}$$

$2a_2 = T_n''(a) = f''(a) \quad => \quad \boldsymbol{a_2 = \frac{f''(a)}{2} = \frac{f''(a)}{2!}}$

$$T_n'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 \cdot (x-a)^1 \dots + n(n-1)(n-2)a_n \cdot (x-a)^{n-3}$$

$3 \cdot 2a_3 = T_n'''(a) = f'''^{(a)} \quad => \quad \boldsymbol{a_3 = \frac{f'''(a)}{3 \cdot 2} = \frac{f'''(a)}{3!}}$

. . . .

$$T_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n \cdot (x-a)^{n-n}$$

$n(n-1)(n-2)\cdot\ldots 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3 = T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \quad =>$

$$\boldsymbol{a_3} = \frac{f^{(n)}(a)}{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{\boldsymbol{f^{(n)}(a)}}{\boldsymbol{n}!}$$

Учитывая найденные коэфициенты получим:

$$T_n(x) = \boldsymbol{f(a)} + \frac{\boldsymbol{f'(a)}}{\boldsymbol{1}!}\cdot(x-a) + \frac{\boldsymbol{f''(a)}}{\boldsymbol{2}!}\cdot(x-a)^2 + \cdots + \frac{\boldsymbol{f^{(n)}(a)}}{\boldsymbol{n}!}\cdot(x-a)^n$$

Def1. Такого вида многочлен называют многочленом Тейлора для данной функции

8.2 Формула Тейлора

Многочлен Тейлора, совпадая в самой точке со значением функции $y = f(x)$, для точек из проколотой окрестности точки a отличается от функции $y = f(x)$. Оценим порядок малости разности функции и многочлена Тейлора относительно приращения аргумента $(x-a)$, $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$

Def2. Выражение вида $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора.

Th1. Если функции $y = f(x)$ имеет в точке a производные до n-го порядка включительно, то $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \bar{o}[(x-a)^n]$.

Def3. Остаточный член формулы Тейлора, записанный в виде

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \bar{o}[(x-a)^n]$$

называется остаточным членом в форме Пеано.

Доказательство: Выражение $R_n(x) = \bar{o}[(x-a)^n]$ эквивалентно тому, что

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Вычислим этот предел, чтоб доказать справедливость

выражения $R_n(x) = \bar{o}[(x-a)^n]$

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - \left[f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n\right]}{(x-a)^n} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overbrace{=}^{\substack{\text{применим}\\ \text{правило Лопиталя}}}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \left[f'(a) + 2\cdot\frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^1 + \dots + n\cdot\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^{n-1}\right]}{n\cdot(x-a)^{n-1}} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overbrace{=}^{\substack{\text{применим}\\ \text{правило Лопиталя}}}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f''(x) - \left[f''(a) + 3\cdot 2\cdot\frac{f'''(a)}{3!}\cdot(x-a)^1 + \dots + n\cdot(n-1)\cdot\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^{n-2}\right]}{n\cdot(n-1)\cdot(x-a)^{n-2}} =$$

$$= \dots = \left(\frac{0}{0}\right) \overbrace{=}^{\substack{\text{применим}\\ \text{правило Лопиталя}\\ n-1 \text{ раз}}} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - \left[f^{(n-1)}(a) + +n!\cdot f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^1\right]}{n!\cdot(x-a)^1} =$$

$$= \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{(x-a)} - \frac{1}{n!}\lim_{x\to a} f^{(n)}(a) = \frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a)\right] = 0 \ \blacksquare$$

Def3. Выражение

$$\boldsymbol{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n + \bar{o}[(x-a)^n]}$$

называется локальной формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Def4. Формула Тейлора в точке $x = a = 0$ называется формулой Маклорена

$$\boldsymbol{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(a)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot x^n + \overline{o}(x^n)}$$

Однако остаточный член в форме Пеано дает лишь порядок малости разности $f(x) - T_n(x)$ и не позволяет оценить его численные значения. Для оценки используется остаточный член в форме Лагранжа.Получим выражение для него. Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз на отрезке $[a, b]$ ю Построим многочлен степени $(n+1)$:

$$T_{n+1}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + A_{n+1} \cdot (x-a)^{n+1}$$

Для этого многочлена выполняются условия:

$$T_{n+1}(x) = f(a), \quad T'_{n+1}(x) = f'(a), \quad \ldots \quad , T_{n+1}^{(n)}(x) = f^{(n)}(a)$$

Потребуем, чтобы $T_{n+1}(b) = f(b)$, т.е. подберем A_{n+1} соответствующим образом.

Тогда функция $F(x) = f(x) - T_{n+1}(x)$ будет удовлетворять условиям:

$$F(a) = F(b) = 0, \quad F'(a) = 0, \quad F''(a) = 0, \quad \ldots \quad , F^{(n)}(a) = 0$$

Для функции $F(x) = f(x) - T_{n+1}(x)$ выполняются условия теоремы Ролля. Применяя теорему Ролля к функции $F(x)$, затем к $F'(x)$, затем к $F''(x)$ и т.д. до $F^{(n)}(x)$ получим, что $\exists\ \xi\ :\ F^{(n+1)}(\xi) = 0$, $\xi \in (a, b)$ =>

$$f^{(n+1)}(\xi) = T_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = (n+1)! \cdot A_{n+1} \quad => \quad \boldsymbol{A_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$

$$f(b) = T_{n+1}(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1}$$

Def5. Формула Тейлора **с остаточным членом** в форме Лагранжа имеет вид:

$$\boldsymbol{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}}$$

Def6.Остаточным членом в форме Лагранжа называется выражение

$$\boldsymbol{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}}$$

где $a < \xi < x$ или $x < \xi < a$

Значение $\boldsymbol{f^{(n+1)}}$ берем не в самой точке $\boldsymbol{a}$**,** а в некоторой надлежащим образом выбранной точке $\boldsymbol{\xi}$**,** $\boldsymbol{\xi}$ зависит от $\boldsymbol{x}$**.**

Замечание 1. Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа сразу получается формула Лагранжа (формула конечных приращений)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(\xi)}{1!} \cdot (x-a) \ \ => \ f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)}$$

Замечание 2. Если производные функции $y = f(x)$ ограничены в окрестности точки a , т.е. $\exists\, M > 0 \ : \ \forall n\, \forall x \in U(a) \qquad \left|f^{(n+1)}(x)\right| < M,$ то справедлива следующая оценка остаточного члена

$$\boldsymbol{|R_n(x)| < \frac{M \cdot |x-a|^{(n+1)}}{(n+1)!}}$$

Окончательно формула Тейлора имеет вид

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{R_n(x) = \overline{o}[(x-a)^n]} \ \ \text{остаточный член в форме Пеано}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}} \text{ остаточный член в форме Лагранжа}}$$

8.3 Формула Тейлора для элементарных функций

Запишем формулы Тейлора для основных элементарных функций:

$y_1 = e^x$; $y_2 = sinx$; $y_3 = cosx$; $y_4 = (1+x)^m$; $y_5 = ln(1+x)$

в точке $x = a = 0$, поэтому правильнее сказать, запишем формулы Маклорена.

Выпишем производные этих функций, найдем их значения в $x = a = 0$, постараемся найти закономерность и записать формулу Маклорена.

$$\boldsymbol{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(a)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot x^n + \overline{o}(x^n)}$$

1. $\boldsymbol{y_1 = e^x}$, вычислим производные функции в точке $a = 0$,

$$y_1' = e^x \quad y_1'' = e^x \quad y_1''' = e^x \ \ldots \ y_1^{(n)} = e^x$$

$$y_1(0) = e^0 = 1 \quad y_1'(0) = e^0 = 1 \quad y_1''(0) = e^0 = 1 \quad y_1'''(0) = e^0 = 1 \ \ldots$$

$$\ldots \ y_1^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

функции $y_1 = e^x$ в окрестности точки 0 по степеням $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)}$$

2. $\boldsymbol{y_2 = sinx}$,аналогично вычислим производные функции в точке $a = 0$,

$$y_2' = cosx \quad y_2'' = -sinx \quad y_2''' = -cosx \quad y_2^{(4)} = sinx \ldots$$

$$\ldots \quad y_2^{(n=2k)} = (-1)^k sinx \quad y_2^{(n=2k+1)} = (-1)^k cosx$$

$$y_2(0) = 0 \quad y_2'(0) = 1 \quad y_2''(0) = 0 \quad y_2'''(0) = -1 \quad y_2^{(4)}(0) = 0 \ldots$$

$$\ldots \ y_2^{(n=2k)}(0) = 0 \quad y_2^{(n=2k+1)}(0) = (-1)^k$$

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

функции $y_2 = sinx$ в окрестности точки 0 по степеням $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x)}$$

Замечание 1. функции $\boldsymbol{y_2 = sinx}$ раскладывается только по нечетным степеням $\boldsymbol{x}$.

3. $\boldsymbol{y_3 = cosx}$, выпишем производные функций, найдем их значения в точке $a = 0$,

$$y_3' = -sinx \quad y_3'' = -cosx \quad y_3''' = sinx \quad y_3^{(4)} = cosx \ldots$$

$$\ldots \quad y_3^{(n=2k-1)} = (-1)^k sinx \quad y_3^{(n=2k)} = (-1)^k cosx$$

$$y_3(0) = 1 \quad y_3'(0) = 0 \quad y_2''(0) = -1 \quad y_2'''(0) = -1 \quad y_2^{(4)}(0) = 0 \ldots$$

$$\ldots \; y_2^{(n=2k)}(0) = 0 \quad y_2^{(n=2k+1)}(0) = (-1)^k$$

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

функции $\boldsymbol{y_3 = cosx}$ в окрестности точки 0 по степеням $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1}(x)}$$

Замечание 2. функции $\boldsymbol{y_3 = cosx}$ раскладывается только по четным степеням $\boldsymbol{x}$.

4. $\boldsymbol{y_4 = (1 + x)^m}$, вычислим производные функции в точке $a = 0$,

$$y_4' = m \cdot (1 + x)^{m-1} \quad y_4'' = m \cdot (m - 1) \cdot (1 + x)^{m-2}$$

$$y_4''' = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (1 + x)^{m-3} \quad \ldots$$

$$\ldots \quad y_4^{(n)} = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \ldots \big(m - (n - 1)\big)(1 + x)^{m-n}$$

$$y_4(0) = 1^m = 1 \quad y_4'(0) = m \quad y_1''(0) = m \cdot (m - 1)$$

$$y_1'''(0) = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \quad \ldots$$

$$\ldots \; y_1^{(n)}(0) = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \ldots \big(m - (n - 1)\big)$$

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

функции $\boldsymbol{y_4 = (1 + x)^m}$ в окрестности точки 0 по степеням $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m\cdot(m-1)x^2}{2!} + \frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)x^3}{3!} +}$$

$$\boldsymbol{+\cdots+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\ldots\big(m-(n-1)\big)x^n}{n!} + R_n(x)}$$

5. $\boldsymbol{y_5 = ln(1+x)}$, вычислим производные функций в точке $a = 0$,

$$y_5' = \frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1} \quad y_1'' = -1\cdot(1+x)^{-2} \quad y_1''' = -1\cdot(-2)\cdot(1+x)^{-3} \ \ldots$$

$$\ldots \ y_1^{(n)} = -1\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot\big(-(n-1)\big)(1+x)^{-n}$$

$$y_5(0) = 0 \quad y_5'(0) = 1 \quad y_5''(0) = -1 \quad y_5'''(0) = -1\cdot(-2) \ \ldots$$

$$\ldots \ y_5^{(n)}(0) = -1\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot\big(-(n-1)\big) = (-1)^{n+1}\cdot(n-1)!$$

Подставим в формулу Маклорена и получим формулу разложения

функции $\boldsymbol{y_5 = ln(1+x)}$ в окрестности 0 по степеням $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n} + R_n(x)}$$

Рассмотрим два частных, но очень важных случая разложения функции $\boldsymbol{y_4 = (1+x)^m}$

6. Возьмем $\boldsymbol{m = -1}$ $\boldsymbol{y_6 = (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}}$

Подставим в разложение функции $y_4 = (1+x)^m$ $m = -1$ и получим

$$\boldsymbol{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ + \cdots + (-1)^n\cdot x^n + R_n(x)}$$

И

7. Возьмем $\boldsymbol{m = -1}$ $\boldsymbol{y_7 = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}}$

Подставим в разложение функции $y_4 = (1-x)^m \quad m = -1$ и получим

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}} = \mathbf{1} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x}^3 + \ + \cdots + \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})$$

Формула Тейлора (Маклорена) для элементарных функций с остаточным членом в форме Пеано
$\boldsymbol{e}^{x} = \mathbf{1} + \boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{x}^2}{\mathbf{2}!} + \frac{\boldsymbol{x}^3}{\mathbf{3}!} + \frac{\boldsymbol{x}^4}{\mathbf{4}!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!} + \overline{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}})$
$\boldsymbol{sinx} = \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x}^3}{\mathbf{3}!} + \frac{\boldsymbol{x}^5}{\mathbf{5}!} - \frac{\boldsymbol{x}^7}{\mathbf{7}!} + \cdots + \frac{(-1)^k \cdot \boldsymbol{x}^{2k+1}}{(2k+1)!} + \overline{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{x}^{2k+2})$
$\boldsymbol{cosx} = \mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{x}^2}{\mathbf{2}!} + \frac{\boldsymbol{x}^4}{\mathbf{4}!} - \frac{\boldsymbol{x}^6}{\mathbf{6}!} + \cdots + \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}\boldsymbol{k}}}{(\mathbf{2}\boldsymbol{k})!} + \overline{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{x}^{2k+1})$
$(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{m}} = \mathbf{1} + \boldsymbol{mx} + \frac{\boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{m}-\mathbf{1})\boldsymbol{x}^2}{\mathbf{2}!} + \frac{\boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{m}-\mathbf{1}) \cdot (\boldsymbol{m}-\mathbf{2})\boldsymbol{x}^3}{\mathbf{3}!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{m}-\mathbf{1}) \cdot (\boldsymbol{m}-\mathbf{2}) \ldots \big(\boldsymbol{m}-(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\big)\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}!} + \overline{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}})$
$\boldsymbol{ln}(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x}^2}{\mathbf{2}} + \frac{\boldsymbol{x}^3}{\mathbf{3}} - \frac{\boldsymbol{x}^4}{\mathbf{4}} + \cdots \frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}} + \overline{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}})$
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x}} = \mathbf{1} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}^3 + \ + \cdots + (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} + \overline{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}})$
$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}} = \mathbf{1} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x}^3 + \ + \cdots + \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} + \overline{\boldsymbol{o}}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}})$

8.4 Применение формулы Тейлора

1. Для приближенных вычислений.

формула Маклорена для функции $y = (1+x)^m$ позволяет вычислять приближенное значение корней. Например,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{x^2}{2!} + \bar{o}(x^2) =>$$

$$\sqrt{1{,}004} = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}004 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{(1{,}004)^2}{2!} = 1 + 0{,}002 - \frac{1}{8}\cdot 0{,}000016 \approx 1{,}001998$$

2. Для вычислений пределов функций. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx - x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx - x}{x^3} == \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \bar{o}(x^3) - x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!} + \bar{o}(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}}{x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{\bar{o}(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + 0 = -\frac{1}{6}$$