**Дифференциал функции.**

Пусть функция определена в окрестности точки . Придадим приращение , тогда функция получит приращение

**Определение 1.**Если приращение функции можно представить в виде

где не зависит от , а ,

то функция называется дифференцируемой в точке , а выражение , пропорциональное и отличающееся от на бесконечно малое более высокого порядка, чем , называется дифференциалом функции и обозначается

Если , то дифференциал это главная линейная часть приращения функции

***Пример1.*** Найти дифференциал функции

Ранее мы давали определение функции, дифференцируемой в точке, как функции, обладающей в этой точке производной. Покажем эквивалентность этих двух определений и заодно найдем выражение для

Пусть приращение функции можно представить в виде

Разделим обе части на и перейдем к пределу при

т.е. из дифференцируемости функции в смысле **Определения 1.**

следует существование производной у функции .

Верно и обратное: если у функции в точке существует производная, т.е.

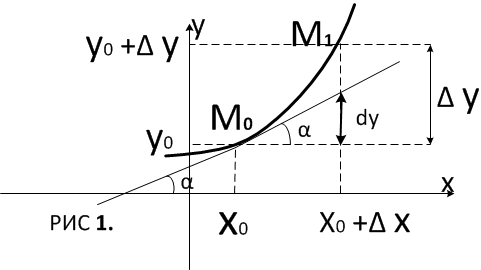
где , т.е. приращение функции представимо в виде, которое необходимо для **Определения 1.**

Дифференциал функции, таким образом, имеет вид

Учитывая, что независимая переменная, то и получаем

т.е. производная функции равна отношению дифференциалов , дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

**Геометрический смысл дифференциала функции.**

****если функция дифференцируемая в точке , то , т.е. дифференциал функции геометрически изображает приращение ординаты касательной

**Алгебраические действия с дифференциалом.**

**1.** Если , то ,

т.к.

Это следует из того, что приращение данной функции всегда равно нулю.

**2.** Дифференциал функции обладает свойством линейности, т.е.

если и дифференцируемые функции, а и - постоянные, то для функции

дифференциал будет равен

**3.** **Дифференциал произведения**

Если и дифференцируемые функции, то для функции

дифференциал будет равен

**4. Дифференциал частного**

Если и дифференцируемые функции, то для функции

дифференциал будет равен

**Дифференциал сложной функции**

**Теорема 1.** Пусть функция дифференцируема по , а функция дифференцируема по , тогда сложная функция будет дифференцируема по , причем её дифференциал определяется по формуле

*Доказательство:*

Действительно,

Другими словами, дифференциал сложной функции равен произведению производной на дифференциал аргумента , что по форме совпадает с выражение для дифференциала простой функции

Это свойство первого дифференциала, сохранять свою форму не зависимо от того, является ли функция простой или сложной функцией своего аргумента, называется инвариантностью первого дифференциала.

**Производные и дифференциалы высших порядков**

**Определение 2.** Если функция дифференцируема и функция также дифференцируема, то производной второго порядка функции будет .

Производной третьего порядка будет

И производной n-го порядка будет

***Приме 2.*** Найти производные n-го порядка функций

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| . . . | . . . | . . . |
|  |  |  |

**Определение 2.** Дифференциалом второго порядка называется дифференциал первого порядка от дифференциала первого порядка, т.е.

Дифференциалом третьего порядка называется дифференциал первого порядка от дифференциала второго порядка, т.е.

Дифференциалом n-го порядка называется дифференциал первого порядка от дифференциала (n-1)-го порядка, т.е.

Поэтому производные высших порядков можно записать в виде

Сложнее обстоит дело с дифференциалами высших порядков от сложной функции.

Если функция дифференцируема по , а функция дифференцируема по , тогда найдем дифференциал сложная функция

Из этой формулы видно, что дифференциалы второго порядка и , следовательно, дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности.

***Формула Лейбница для производной n-го порядка***

***от произведения функций***

Если и n раз дифференцируемые функции, то для функции

найдем производную n-го порядка.

Доказывать будем, используя метод математической индукции.

Первый шаг мы проверили.

Второй шаг: предположим, что для k-той производной справедлива формула

Третий шаг: докажем, что для (k+1)-той производной справедлива формула

Воспользуемся равенствами

***Пример2.*** Найти пятую производную функции