Тема 6 Дифференциал функции.

6.1 Определение дифференциала.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x. Придадим x приращение Δx , тогда функция $y = f(x)$ получит приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Def 1.Если приращение функции $y = f(x)$ можно представить в виде

$$\Delta y = A(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$$

где $A(x)$ не зависит от Δx ,

$\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\Delta x)$,

то функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x , а выражение $A(x) \cdot \Delta x$, пропорциональное Δx и отличающееся от Δy на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx , называется дифференциалом функции и обозначается $dy = A(x) \cdot \Delta x$ следовательно

$$\Delta y - dy = \alpha(\Delta x)$$

Если $A(x) \neq 0$, то дифференциалом называется главная линейная часть приращения функции $y = f(x)$

Рассмотрим задачу: Найти дифференциал функции $y = x^2$

Приращение функции есть $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$

$= x^2 + 2\Delta x \cdot x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2\Delta x \cdot x + (\Delta x)^2 =$

$$= \underbrace{2x \cdot \Delta x}_{\substack{\text{главная линейная часть} \\ \text{приращения функции}}} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{\substack{\text{бесконечно малое более} \\ \text{высокого порядка,чем } \Delta x}}$$

$dy = 2x \cdot \Delta x$

Покажем эквивалентность определения функции, дифференцируемой в точке, как функции, обладающей в этой точке производной и данного определения.

Предположим, что приращение функции $y = f(x)$ можно представить в виде

$$\Delta y = A(x)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x),$$

Разделим обе части на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$.Получим

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A(x)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)}{\Delta x} = A(x)$$

следовательно, из дифференцируемости функции $y = f(x)$ по **Def1**

вытекает существование производной у функции $y = f(x)$.

Верно и обратное утверждение: если у функции $y = f(x)$ в точке x существует производная

$\exists f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ => $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$ =>то

$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha_1(\Delta x),$

где $\alpha_1(\Delta x) = \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x = \bar{o}(\Delta x)$, т.е. приращение функции $y = f(x)$ представимо в виде, которое необходимо для **Def1**

Дифференциал функции $y = f(x)$, таким образом, имеет вид

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x$$

Учитывая, что $x -$ независимая переменная $dx = \Delta x$ получаем

$$dy = f'(x)\cdot dx \quad => \quad f'(x) = y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

т.е. производная функции $y = f(x)$ равна отношению дифференциалов, дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

6.2 Геометрический смысл дифференциала функции.

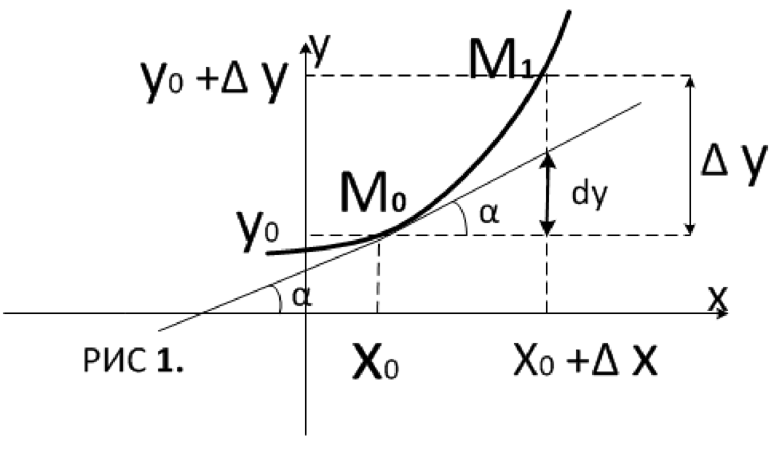

РИС **1.**

если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $dy = f'(x)\cdot\Delta x = tg\alpha\cdot\Delta x = |AB|$, т.е. дифференциал функции геометрически есть приращение ординаты касательной в точке x_0.

6.3 Правила вычисления дифференциала

1. Если $\boldsymbol{y = f(x) = c = const}$, то $\boldsymbol{dc = 0}$,

т.к. $dc = c' \cdot dx = 0$

приращение данной функции всегда равно нулю.

$$\boxed{dc = 0}$$

2.Линейность дифференциала

Если функции

$u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы , а c_1и c_2 - постоянные, то для функции

$$y(x) = c_1 \cdot u(x) + c_2 \cdot v(x)$$

дифференциал запишется в виде

$$dy = d\big(c_1 \cdot u(x) + c_2 \cdot v(x)\big) = \big(c_1 \cdot u(x) + c_2 \cdot v(x)\big)' \cdot dx =$$

$$= c_1 \cdot u'(x) \cdot dx + c_2 \cdot v'(x) \cdot dx = c_1 \cdot du + c_2 \cdot dv$$

$$\boxed{d\big(c_1 \cdot u(x) + c_2 \cdot v(x)\big) = c_1 \cdot du(x) + c_2 \cdot dv(x)}$$

3. Дифференциал произведения

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы , то для их произведения

дифференциал запишется в виде

$$dy = d\big(u(x) \cdot v(x)\big) = \big(u(x) \cdot v(x)\big)' \cdot dx =$$

$$= v(x) \cdot u'(x) \cdot dx + u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = v(x) \cdot du(x) + u(x) \cdot dv(x)$$

$$\boxed{d\big(u(x) \cdot v(x)\big) = v(x) \cdot du(x) + u(x) \cdot dv(x)}$$

4. Дифференциал частного

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы , то для функции

$$y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

дифференциал запишется в виде

$$dy = d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' \cdot dx = \frac{v(x) \cdot u'(x) \cdot dx - u(x) \cdot v'(x) \cdot dx}{\big(v(x)\big)^2} =$$

$$= \frac{v(x) \cdot du(x) - u(x) \cdot dv(x)}{\big(v(x)\big)^2}$$

$$\boxed{d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(x) \cdot du(x) - u(x) \cdot dv(x)}{\big(v(x)\big)^2}}$$

6.4 Дифференциал сложной функции

Th 1. Пусть функция $u = u(x)$ дифференцируема по x, а функция $F = F(u)$ дифференцируема по u, тогда сложная функция $y(x) = F\big(u(x)\big)$ будет дифференцируема по x, причем её дифференциал определяется по формуле

$$dy(x) = F'_u(u) \cdot du$$

Доказательство:

Распишем подробно дифференциал

$$dy(x) = y'_x(x) \cdot dx = [F'_u(u) \cdot u'_x(x)] \cdot dx = \underbrace{F'_u(u)} \cdot \underbrace{u'_x(x) \cdot dx}_{du} = F'_u(u) \cdot du$$

Следовательно, дифференциал сложной функции $y(x) = F\big(u(x)\big)$ равен произведению производной $F'_u(u)$ на дифференциал аргумента du, что по форме совпадает с выражением для дифференциала простой функции $y = f(x)$. Свойство первого дифференциала, сохранять свою форму независимо от того, является ли функция простой или сложной функцией своего аргумента, называется инвариантностью первого дифференциала.

6.5 Производные и дифференциалы высших порядков

Def 2. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема и функция $y'(x) = f'(x)$ также дифференцируема, то производной второго порядка функции $y = f(x)$ будет $y''(x) = \left(y'(x)\right)'$,т.е. производная от первой производной

Производной третьего порядка будет $y'''(x) = \left(y''(x)\right)'$ т.е. производная от второй производной и т.д.

И производной n-го порядка будет $y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'$ т.е. производная от производной (n-1) порядка

Рассмотрим пример: найти производные n-го порядка функций

$y = x^3$	$y = sinx$	$y = e^{kx}$
$y'(x) = 3x^2$	$y'(x) = cosx$	$y'(x) = k \cdot e^{kx}$
$y''(x) = 3 \cdot 2x$	$y''(x) = -sinx$	$y''(x) = k^2 \cdot e^{kx}$
$y'''(x) = 6$	$y'''(x) = -cosx$	$y'''(x) = k^3 \cdot e^{kx}$
$y^{(4)}(x) = 0$	$y^{(4)}(x) = sinx$	$y^{(4)}(x) = k^4 \cdot e^{kx}$
$y^{(5)}(x) = 0$	$y^{(5)}(x) = cosx$	$y^{(5)}(x) = k^5 \cdot e^{kx}$
. . .	. . .	. . .
$y^{(n)}(x) = 0$	$y^{(n)}(x) = sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$	$y^{(n)}(x) = k^n \cdot e^{kx}$

Def 3 Дифференциалом второго порядка называется дифференциал первого порядка от дифференциала первого порядка, т.е.

$$d^2y = d(dy) = d(y'(x) \cdot dx) = (y'(x) \cdot dx)' \cdot dx =$$

$$= y''(x) \cdot (dx)^2 = y''(x) \cdot dx^2$$

$$\boxed{d^2y = y''(x) \cdot dx^2}$$

Аналогично дифференциалом третьего порядка называется дифференциал первого порядка от дифференциала второго порядка, т.е.

$$d^3y = d(d^2y) = d(y''(x) \cdot dx^2) = (y''(x) \cdot dx^2)' \cdot dx =$$

$$= y'''(x) \cdot (dx)^3 = y'''(x) \cdot dx^3$$

$$\boxed{d^3y = y'''(x) \cdot dx^3}$$

Дифференциалом n-го порядка называется дифференциал первого порядка от дифференциала (n-1)-го порядка, т.е.

$$\boxed{d^ny = y^{(n)}(x) \cdot dx^n}$$

Поэтому производные высших порядков можно записать в виде

$$\boxed{y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}}$$

Рассмотрим теперь дифференциалы высших порядков от сложной функции.

Если функция $u = u(x)$ дифференцируема по x, а функция $F = F(u)$ дифференцируема по u, то дифференциал сложной функции $y(x) = F\big(u(x)\big)$

примет вид

$$dy(x) = F'_u(u) \cdot du$$

второй дифференциал запишется в виде

$$d^2y = d(dy) = d(F'_u(u) \cdot du) = d\left(F'_u(u)\right) \cdot du + d(du) \cdot F'_u(u) =$$

$$= F''_u(u) \cdot du^2 + F'_u(u) \cdot d^2u$$

Из записи видно, что дифференциалы второго порядка и, следовательно, дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности.

6.6 Формула Лейбница для производной n-го порядка от произведения функций

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ n раз дифференцируемые функции, тогда для функции

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

производная n-го порядка находится следующим образом

$$\boldsymbol{\big(u(x) \cdot v(x)\big)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

$$\big(u(x) \cdot v(x)\big)'' = \big(u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)\big)' =$$

$$= \big(u'(x) \cdot v(x)\big)' + \big(u(x) \cdot v'(x)\big)' =$$

$$= u''(x) \cdot v(x) + u'(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v'(x) + u(x) \cdot v''(x) =$$

$$= u''(x) \cdot v(x) + 2 \cdot u'(x) \cdot v'(x) + u(x) \cdot v''(x)$$

$$\boldsymbol{\big(u(x) \cdot v(x)\big)'' = u''(x) \cdot v(x) + 2 \cdot u'(x) \cdot v'(x) + u(x) \cdot v''(x)}$$

Для доказательства воспользуемся методом математической индукции.

Первый шаг мы вычислили

Второй шаг: предположим, что для k-той производной справедлива формула

$$\big(u(x) \cdot v(x)\big)^{(k)} =$$

$$= C_k^0 \cdot u^k \cdot v^0 + C_k^1 \cdot u^{(k-1)} \cdot v^1 + C_k^2 \cdot u^{(k-2)} \cdot v^2 + \cdots + C_k^k \cdot u^0 \cdot v^k$$

Третий шаг: докажем, что для (k+1)-той производной справедлива формула

$$\big(u(x) \cdot v(x)\big)^{(k+1)} =$$

$$= C_{k+1}^0 \cdot u^{k+1} \cdot v^0 + C_{k+1}^1 \cdot u^{(k)} \cdot v^1 + C_{k+1}^2 \cdot u^{(k-1)} \cdot v^2 + \dots + C_{k+1}^{k+1} \cdot u^0 \cdot v^{k+1}$$

Как известно,

$$C_k^m + C_k^{m+1} = C_{k+1}^{m+1} \text{ и } C_k^0 = C_{k+1}^0 = C_{k+1}^{k+1}$$

$$\left(u(x) \cdot v(x)\right)^{(k+1)} = \left(\left(u(x) \cdot v(x)\right)^{(k)}\right)' =$$

$$= \left(C_k^0 \cdot u^k \cdot v^0 + C_k^1 \cdot u^{(k-1)} \cdot v^1 + C_k^2 \cdot u^{(k-2)} \cdot v^2 + \dots + C_k^k \cdot u^0 \cdot v^k\right)' =$$

$$= (C_k^0 \cdot u^k \cdot v^0)' + \left(C_k^1 \cdot u^{(k-1)} \cdot v^1\right)' + \left(C_k^2 \cdot u^{(k-2)} \cdot v^2\right)' + \dots + \left(C_k^k \cdot u^0 \cdot v^k\right)' =$$

$$= C_k^0 \cdot u^{(k+1)} \cdot v^0 + C_k^0 \cdot u^{(k)} \cdot v^{(1)} + C_k^1 \cdot u^{(k)} \cdot v^{(1)} + C_k^1 \cdot u^{(k-1)} \cdot v^{(2)} +$$

$$+ C_k^2 \cdot u^{(k-1)} \cdot v^{(2)} + C_k^2 \cdot u^{(k-2)} \cdot v^{(3)} + \dots + C_k^k \cdot u^{(1)} \cdot v^{(k)} + C_k^k \cdot u^{(0)} \cdot v^{(k+1)} =$$

$$= C_k^0 \cdot u^{(k+1)} \cdot v^{(0)} + (C_k^0 + C_k^1) \cdot u^k \cdot v^{(1)} +$$

$$+ (C_k^1 + C_k^2) \cdot u^{(k-1)} \cdot v^{(2)} + \dots + C_k^k \cdot u^{(0)} \cdot v^{(k+1)} =$$

$$= C_{k+1}^0 \cdot u^{k+1} \cdot v^0 + C_{k+1}^1 \cdot u^k \cdot v^1 + C_{k+1}^2 \cdot u^{(k-1)} \cdot v^2 + \dots + C_{k+1}^{k+1} \cdot u^0 \cdot v^{k+1} \quad \blacksquare$$

$$\boxed{\begin{gathered}\left(\boldsymbol{u(x) \cdot v(x)}\right)^{(\boldsymbol{n})} = \\ = \boldsymbol{C_n^0 \cdot u^{(n)} \cdot v^{(0)} + C_n^1 \cdot u^{(n-1)} \cdot v^{(1)} + C_n^2 \cdot u^{(n-2)} \cdot v^{(2)} + \dots + C_n^n \cdot u^{(0)} \cdot v^{(n)}}\end{gathered}}$$

Приведем пример: Найти пятую производную функции $y = x^2 \cdot e^x$

$$\text{р}(x^2 \cdot e^x)^{(5)} =$$

$$= C_5^0 \cdot (x^2)^{(5)} \cdot (e^x)^{(0)} + C_5^1 \cdot (x^2)^{(5-1)} \cdot (e^x)^{(1)} + C_5^2 \cdot (x^2)^{(5-2)} \cdot (e^x)^{(2)} +$$

$$+ C_5^3 \cdot (x^2)^{(5-3)} \cdot (e^x)^{(3)} + C_5^4 \cdot (x^2)^{(5-4)} \cdot (e^x)^{(4)} + C_5^5 \cdot (x^2)^{(0)} \cdot (e^x)^{(5)} =$$

$$= 0 + 0 + 0 + C_5^3 \cdot 2e^x + C_5^4 \cdot 2xe^x + C_5^5 \cdot x^2 e^x =$$

$$= 10 \cdot 2e^x + 5 \cdot 2xe^x + 1 \cdot x^2 e^x$$