**Производная функции.**

Пусть функция определена в окрестности точки . Придадим приращение , тогда функция получит приращение

Составим отношение и рассмотрим предел при

**Определение 1.** Производной функции в точке называется предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, и обозначается

**Определение 2.** Если функция имеет производную

в точке , т.е.

**Определение 3. Ф**ункция дифференцируема на отрезке , если она дифференцируема в каждой внутренней точке отрезка.

***Пример1.*** Найти производную функции

рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

**Теорема1** (непрерывность дифференцируемой функции)

Если функция дифференцируема в точке , то она непрерывна в этой точке.

*Доказательство:*

Так как функция дифференцируема в точке , то

тогда по теореме о связи функции и её предела имеем

Посчитаем предел приращения функции при или при

функция в точке непрерывна.

**Замечание** Обратное утверждение в общем случае неверно. Функция, непрерывная в данной точке, может не быть дифференцируемой в этой точке. Так, например, функция в точке непрерывна, но

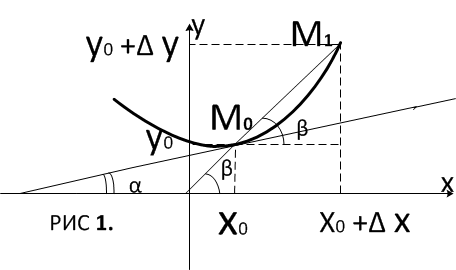
при отношение , а при отношение

т.е. предел отношение не существует

**Геометрический смысл производной.**

Рассмотрим график непрерывной функции в окрестности

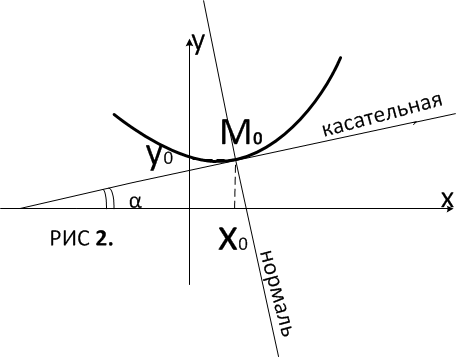
точки . Давая приращение , получим приращение функции . Тогда точка будет лежать на графике и иметь координаты . Проведем секущую через точки и . Пусть секущая наклонена к положительному направлению оси под .

Напомним, что касательная к кривой в точке  **н**азывается прямая, проходящая через точку , для которой угол наклона к ней бесконечно малой хорды стремится к нулю, когда точка стремится к точке по кривой.

Устремим тогда в силу непрерывности функции точка будет стремиться к точке, а секущая стремится занять положение касательной к графику функции в точке . Угол , меняясь, стремится к углу , тогда

Таким образом, производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке к положительному направлению оси .

Уравнение касательной к графику функции в точке запишется в виде



а уравнение нормали к графику функции в точке запишется в виде

***Пример2.*** Написать уравнение касательной и нормали к графику функции в точке .

Найдем производную функции

Уравнение касательной

Уравнение нормали

**Механический смысл производной**

Рассмотрим движение материальной точки вдоль некоторой линии. С момента времени за время точка прошла путь

Составим отношение . Если скорость движения точки постоянна, то . Если же движение неравномерное, то отношение будет характеризовать среднюю скорость движения за время При

отношение стремится к истинной скорости движения в данный момент времени, т.е.

т.е. производная от пути по времени есть скорость движения точки в момент времени

**Алгебраические действия с производной.**

**1.** Если , то

Это следует из того, что приращение данной функции всегда равно нулю.

**2.** Производная функции обладает свойством линейности, т.е.

если и дифференцируемые функции, а и - постоянные, то для функции

производная будет равна

Дадим аргументу приращение , тогда функции и имеют приращения и . Составим приращение функции

Рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, учитываем , что

Воспользовались свойствами пределов.

**3.производная произведения**

Если и дифференцируемые функции, то для функции

производная будет равна

Дадим аргументу приращение , тогда функции и имеют приращения и . Составим приращение функции

Рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, учитываем, что

Воспользовались свойствами пределов.

**4. производная частного**

Если и дифференцируемые функции, то для функции

производная будет равна

Дадим аргументу приращение , тогда функции и имеют приращения и . Составим приращение функции

Рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, учитываем , что

Воспользовались свойствами пределов.

**Производная сложной функции**

**Теорема2.** Пусть функция дифференцируема по , а функция дифференцируема по , тогда сложная функция будет дифференцируема по , причем

*Доказательство:*

Дадим аргументу приращение , тогда функции получит приращение , а имеет приращение . Так как функция дифференцируема по , то

где

Разделим полученное равенство на и перейдем к пределу при

Здесь в силу дифференцируемости ,а следовательно непрерывности функции

***Пример3.*** Найти производную функции . Обозначим

, тогда

**Производная обратной функции**

Сформулируем без доказательства теорему о существовании обратной функции.

**Теорема3.** Еслифункции определёна, монотонна в строгом смысле и непрерывна на некотором отрезке , то на соответствующем отрезке изменения функции определена обратная функция , которая на этом отрезке также строго монотонна и непрерывна и при этом

**Теорема4.**( о дифференцировании обратной функции)

Еслифункции удовлетворяет условиям **теоремы 3** и дифференцируема на отрезке , то обратная функция , которая определена на отрезке также будет дифференцируема и

*Доказательство:*

Дадим аргументу приращение , тогда функции получит приращение , причем в силу монотонности в строгом смысле , приращение как прямой , так и обратной функции отличны от нуля.

При и ,так как функция непрерывна.

Рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

Предел, стоящий в знаменателе, по условию теоремы существует.

***Пример3.*** Найти производную функции .

**Таблица основных производных**

**1.** Найти производную функции

,

рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

**2.**Найти производную функции

,

рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

**3.**Найти производную функции

,

рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

**4.**Найти производную функции

,

рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

**5.**Найти производную функции

Учитывая, что используем формулу для производной частного, получим

**6.**Найти производную функции

Учитывая, что используем формулу для производной частного, получим

**7.**Найти производную функции

,

рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

**8.** при получаем,

**9.**Найти производную функции

,

рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

**10.**

**11.**Найти производную функции

областью определения функции является отрезок

множеством значения функции является отрезок

и

Учитывая, что производная обратной функции , найдем производную арксинуса

**12.**Найти производную функции

областью определения функции является отрезок

множеством значения функции является отрезок

и

Учитывая, что производная обратной функции , найдем производную арккосинуса

**13.**Найти производную функции

областью определения функции является интервал

множеством значения функции является интервал

и

Учитывая, что производная обратной функции , найдем производную арктангенса

**14.**Найти производную функции

областью определения функции является интервал

множеством значения функции является интервал

и

Учитывая, что производная обратной функции , найдем производную арккотангенса

**гиперболические функции**

|  |  |
| --- | --- |
| **Название функции** | **Вид функции** |
| синус гиперболический |  |
| косинус гиперболический |  |
| тангенс гиперболический |  |
| котангенс гиперболический |  |
| **Свойство гиперболических функций** |  |

**15.** Найти производную функции

Учитывая, что используем формулу для производной суммы, получим

**16.** Найти производную функции

Учитывая, что используем формулу для производной суммы, получим

**17.** Найти производную функции

Учитывая, что используем формулу для производной частного, получим

**18.** Найти производную функции

Учитывая, что используем формулу для производной частного, получим

**Таблица основных производных**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1** |  | **10** |  |
| **2** |  | **11** |  |
| **3** |  | **12** |  |
| **4** |  | **13** |  |
| **5** |  | **14** |  |
| **6** |  | **15** |  |
| **7** |  | **16** |  |
| **8** |  | **17** |  |
| **9** |  | **18** |  |

***Производная функции, заданной параметрически.***

Пусть функция задана параметрически, т.е.

где , причём предположим, что функция на отрезке однозначна, монотонна в строгом смысле и непрерывна, тогда у этой функции существует обратная функция , т.е.

Пусть кроме того функции и надифференцируемы, тогда производная по находится по формуле дифференцирования сложной функции

***Пример2.*** Найти производную функции , заданной параметрически, т.е.

***Производная функции, заданной неявно.***

Пусть функция задана неявно, т.е. в виде равенства

Для нахождения производной необходимо данное равенство дифференцировать по правилам дифференцирования сложной функции, предполагая, что

***Пример3.*** Найти производную функции , заданной неявно, т.е.

Домашнее задание: доказать

|  |  |
| --- | --- |
| Свойство гиперболических функций |  |