Тема5 Производная функции.

5.1 Определение производной

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную в окрестности точки x. Дадим x приращение Δx , тогда функция $y=f(x)$ получит приращение

$$y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

Def 1. Производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, и обозначается $f'(x)$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Def 2. Если функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$

в точке x, т.е.

$\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то эта функция называется дифференцируемой в точке x.

Def 3. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой на отрезке $[a,b]$, если она дифференцируема в каждой внутренней точке отрезка $[a,b]$.

Пример1. Найти производную функции $y=x^2$

Найдем приращение функции $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=$

$=x^2+2\Delta x\cdot x+(\Delta x)^2-x^2=2\Delta x\cdot x+(\Delta x)^2$

рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x\cdot x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

Th1 (непрерывность дифференцируемой функции)

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

Доказательство:

Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \quad \text{, где } x = x_0 + \Delta x$$

тогда по теореме о связи функции и её предела меем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \qquad \text{где } \alpha(\Delta x) = \bar{o}(\Delta x)$$

или $$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

Посчитаем предел приращения функции при $\Delta x \to 0$ или при $x \to x_0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x) = 0 \quad =>$$

функция $y = f(x)$ в точке x_0 непрерывна.

Замечание Обратное утверждение в общем случае неверно. Функция, непрерывная в данной точке, может не быть дифференцируемой в этой точке. Так, например, функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ непрерывна, но

при $\Delta x > 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, а при $\Delta x < 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$

т.е. предел отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует

$$\nexists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad .$$

5.2 Геометрический смысл производной.

Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$ в окрестности

точки $M_0(x_0, y_0)$. Давая x_0 приращение Δx, получим приращение функции Δy. Тогда точка M_1 будет лежать на графике и иметь координаты $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Проведем секущую через точки M_0 и M_1. Пусть секущая наклонена к положительному направлению оси Ox под углом β, $tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

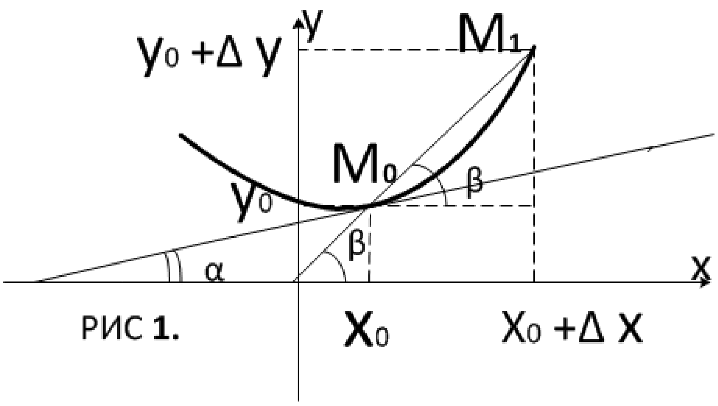

РИС 1.

Напомним, что касательной к кривой в точке M_0 **н**азывается прямая, проходящая через точку M_0 , для которой угол наклона к ней бесконечно малой хорды $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$ стремится к нулю, когда точка M_1 стремится к точке M_0 по кривой.

Устремим $\Delta x \to 0$, тогда в силу непрерывности функции $y = f(x)$ точка M_1 будет стремиться к точке M_0, а секущая $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$ стремится занять положение касательной к графику функции в точке M_0. Угол β при этом стремится к углу α , тогда

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(\mathrm{x}_0)$$

Таким образом, производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке к положительному направлению оси Ox.

$$k = tg\alpha = f'(\mathrm{x}_0)$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $\mathrm{M}_0(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ запишется в виде

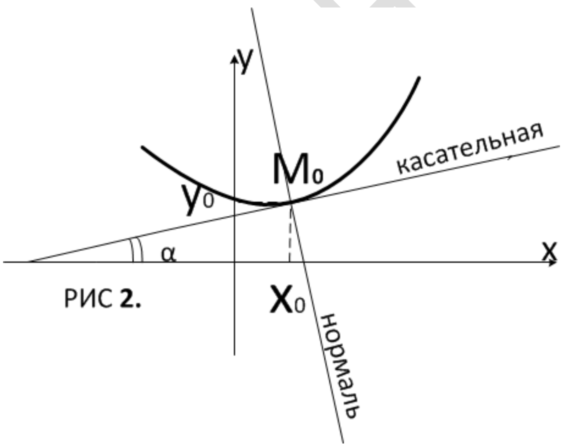

РИС 2.

$$\boldsymbol{y - \mathrm{y}_0 = f'(\mathrm{x}_0)\cdot(x - \mathrm{x}_0)}$$

а уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $\mathrm{M}_0(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ запишется в виде

$$\boldsymbol{y - \mathrm{y}_0 = -\frac{1}{f'(\mathrm{x}_0)}\cdot(x - \mathrm{x}_0)}$$

Пример2. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 2x^2$ в точке $\mathrm{M}_0(2{,}8)$.

Найдем производную функции $f'(x) = y'(x) = 4x \Rightarrow \; y'(\mathrm{x}_0) = y'(2) = 8$

Уравнение касательной $y - 8 = 8 \cdot (x - 2)$ или $y = 8x - 8$

Уравнение нормали $y - 8 = -\frac{1}{8} \cdot (x - 2)$ или $y = -\frac{1}{8}x + 8{,}25$

5.3 Механический смысл производной

Рассмотрим движение материальной точки вдоль некоторой линии. С момента времени t за время Δt точка проходит путь $\Delta s = s \cdot (t + \Delta t) - s(t)$

Оценим отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Если скорость движения точки постоянна, то $\frac{\Delta s}{\Delta t} = const$. Если же движение неравномерное, то отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будет характеризовать среднюю скорость движения за время Δt. При $\Delta t \to 0$ отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ стремится к мгновенной скорости движения в данный момент времени, т.е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t) = v(t)$$

т.е. производная от пути по времени есть скорость движения точки в момент времени t.

5.4 Алгебраические действия с производной.

1. Если $y = f(x) = c = const$, то $y' = c' = 0$

Это следует из того, что приращение данной функции всегда равно нулю.

$$\boxed{c' = 0}$$

2. Производная функции обладает свойством линейности, т.е.

если $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые функции, а c_1 и c_2 - постоянные, то для функции

$$y(x) = c_1 \cdot u(x) + c_2 \cdot v(x)$$

производная будет равна

$$y'(x) = \left(c_1 \cdot u(x) + c_2 \cdot v(x)\right)' = c_1 \cdot u'(x) + c_2 \cdot v'(x)$$

Дадим аргументу x приращение Δx, тогда функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют приращения $\Delta u(x)$ и $\Delta v(x)$. Составим приращение функции $y(x)$

$$\Delta y(x) = c_1 \cdot \Delta u(x) + c_2 \cdot \Delta v(x)$$

Рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, учитывая, что

$\Delta u(x) \to 0$ и $\Delta v(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c_1 \cdot \Delta u(x) + c_2 \cdot \Delta v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c_1 \cdot \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + c_2 \cdot \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} =$$

$$= c_1 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + c_2 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} = c_1 \cdot u'(x) + c_2 \cdot v'(x)$$

Окончательно имеем $\boxed{(c_1 u + c_2 v)' = c_1 u' + c_2 v'}$

3.Производная произведения

Если $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые функции, то для функции

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

производная будет равна

$$y'(x) = \left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Дадим аргументу x приращение Δx, тогда функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют приращения $\Delta u(x)$ и $\Delta v(x)$. Составим приращение функции $y(x)$

$$\Delta y(x) = \left(u(x) + \Delta u(x)\right) \cdot \left(v(x) + \Delta v(x)\right) - u(x) \cdot v(x) =$$

$$= \Delta u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v(x) + \Delta u(x) \cdot \Delta v(x)$$

Рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, учитываем, что

$\Delta u(x) \to 0$ и $\Delta v(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v(x) + \Delta u(x) \cdot \Delta v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} v(x) \cdot \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + u(x) \cdot \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta u(x) \cdot \Delta v(x)}{\Delta x} =$$

$$= v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} \cdot \Delta v(x) =$$

$$= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

.

Окончательно имеем $\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$

4. Производная частного

Если $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые функции, то для функции

$$y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

производная будет равна

$$y'(x) = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\big(v(x)\big)^2}$$

Дадим аргументу x приращение Δx, тогда функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют приращения $\Delta u(x)$ и $\Delta v(x)$. Составим приращение функции $y(x)$

$$\Delta y(x) = \frac{u(x) + \Delta u(x)}{v(x) + \Delta v(x)} - \frac{u(x)}{v(x)} =$$

$$= \frac{\big(u(x) + \Delta u(x)\big) \cdot v(x) - u(x) \cdot \big(v(x) + \Delta v(x)\big)}{\big(v(x) + \Delta v(x)\big) \cdot v(x)} =$$

$$= \frac{v(x) \cdot \Delta u(x) - u(x) \cdot \Delta v(x)}{\big(v(x)\big)^2 + v(x) \cdot \Delta v(x)}$$

Рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, учитываем, что

$\Delta u(x) \to 0$ и $\Delta v(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x) \cdot \Delta u(x) - u(x) \cdot \Delta v(x)}{\left(\left(v(x)\right)^2 + v(x) \cdot \Delta v(x)\right) \cdot \Delta x} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u(x)}{\Delta x} \cdot v(x) - u(x) \cdot \dfrac{\Delta v(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(v(x)\right)^2 + v(x) \cdot \Delta v(x)} = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

Окончательно имеем $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{(v)^2}}$

5.5 Производная сложной функции

Th2. Пусть функция $u = u(x)$ дифференцируема по x, а функция $F = F(u)$ дифференцируема по u, тогда сложная функция $y(x) = F\big(u(x)\big)$ будет дифференцируема по x , причем

$$y'(x) = F_u'(u) \cdot u_x'(x)$$

Доказательство:

Дадим аргументу x приращение Δx, тогда функции $u(x)$ получит приращение $\Delta u(x)$, а $y(x)$ имеет приращение Δy. Так как функция $F = F(u)$ дифференцируема по u, то

$$\exists \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad => \quad \frac{\Delta y}{\Delta u} = F'(u) + \alpha(\Delta u) \;=>$$

$$\Delta y = F'(u) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u$$

где $\alpha(\Delta u) = \bar{o}\,(\Delta u)$

Разделим полученное равенство на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F'(u)\cdot\Delta u\ +\alpha(\Delta u)\cdot\Delta u}{\Delta x}=$$

$$=F'(u)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=F'_u(u)\cdot u'_x(x)$$

Здесь $\Delta u\to 0$ при $\Delta x\to 0$ в силу дифференцируемости, а следовательно непрерывности функции $\mathrm{u}=\mathrm{u}(\mathrm{x})$

Пример3. Найти производную функции $y(x)=cos(x^2+5x)$. Обозначим

$u=x^2+5x$, тогда

$$y'(x)=\big(cos(u)\big)'_u\cdot u'_x(x)=-sin(u)\cdot(2x+5)$$

5.6 Производная обратной функции

Сформулируем без доказательства теорему о существовании обратной функции.

Th3. Если функции $y=f(x)$ определена, монотонна в строгом смысле и непрерывна на некотором отрезке $[a,b]\subset Ox$, то на соответствующем отрезке $[c,d]\subset Oy$ изменения функции определена обратная функция $x=g(y)$, которая на этом отрезке также строго монотонна и непрерывна и при этом $f\big(g(y)\big)\equiv y$

Th4.(о дифференцировании обратной функции)

Если функции $y=f(x)$ удовлетворяет условиям **Th 3** и дифференцируема на отрезке $[a,b]\subset Ox$, то обратная функция $x=g(y)$, которая определена на отрезке $[c,d]\subset Oy$ также будет дифференцируема и

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}\qquad\text{или}\qquad x'_y=\frac{1}{y'_x}$$

Доказательство:

Дадим аргументу y приращение Δy, тогда функции $x(y)$ получит приращение Δx , причем в силу монотонности в строгом смысле, приращение как прямой , так и обратной функции отличны от нуля.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

При $\Delta y \to 0$ и $\Delta x \to 0$,так как функция $x = g(y)$ непрерывна.

Оценим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}$$

Предел, стоящий в знаменателе, по условию теоремы существует.

Пример4. Найти производную функции $y(x) = \sqrt{x}$ $x \in [1, +\infty]$.

$$x = y^2 \quad \text{и} \quad x'_y = 2y \quad => y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

5.7 Таблица основных производных

1. Найти производную функции $y = c = const$

Найдем приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$,

составим предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$\boxed{(\mathbf{c})' = \mathbf{0}}$$

2. Найти производную функции $y = x^n$

Составим приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^n - x^n$, рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}x^n\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1}{\Delta x}=\left|\begin{matrix}\text{воспользуемся при }\Delta x\to 0\\(1+\Delta x)^n-1\ \sim\ n\cdot\Delta x\end{matrix}\right|=$$

$$=x^n\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1}{\Delta x}=|x^n\text{ не зависит от }\Delta x\,|=$$

$$=x^n\lim_{\Delta x\to 0}\frac{n\cdot\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=\frac{n\cdot x^n}{x}=n\cdot x^{n-1}$$

$$\boxed{(\mathbf{x^n})'=\mathbf{n\cdot x^{n-1}}}$$

3. Найти производную функции $y=sinx$

Составим приращение функции

$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=sin(x+\Delta x)-sinx,$

рассмотрим предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{sin(x+\Delta x)-sinx}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2sin\frac{\Delta x}{2}\cdot cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{воспользуемся первым замечательным пределом}\\\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1\end{matrix}\right|=cosx$$

$$\boxed{\boldsymbol{(sinx\,)' = cosx}}$$

4. Найти производную функции $y = cosx$

Составим приращение функции

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = cos(x + \Delta x) - cosx,$

рассмотрим предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cos(x + \Delta x) - cosx}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2sin\frac{\Delta x}{2} \cdot sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

= | воспользуемся первым замечательным пределом $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ | $= -sinx$

$$\boxed{\boldsymbol{(cosx\,)' = -sinx}}$$

5. Найти производную функции $y = tgx$

Учитывая, что $y = tgx = \frac{sinx}{cosx}$ используем формулу для производной частного, получим

$$y'(x) = \left(\frac{sinx}{cosx}\right)' = \frac{cosx \cdot cosx - (-sinx) \cdot sinx}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$$

$$\boxed{(\mathbf{tgx})' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2x}}}$$

6. Найти производную функции $y = ctgx$

Учитывая, что $y = ctgx = \frac{cosx}{sinx}$ используем формулу для производной частного, получим

$$y'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x)\cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{sin^2 x}$$

$$\boxed{(\mathbf{ctgx})' = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{sin^2 x}}}$$

7. Найти производную функции $y = a^x$

Составим приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (a)^{x+\Delta x} - a^x$,

рассмотрим предел отношений приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a)^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \left| \begin{matrix} \text{воспользуемся при } \Delta x \to 0 \\ a^{\Delta x} - 1 \sim \ ln a \cdot \Delta x \end{matrix} \right| =$$

$$= a^x \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x \cdot \ ln a}{\Delta x} = |\ a^x \text{не зависит от } \Delta x\ | = a^x \cdot ln a$$

$$\boxed{(\boldsymbol{a^x})' = \boldsymbol{a^x \cdot lna}}$$

8. при $\boldsymbol{a = e}$ получаем, $\boxed{(\boldsymbol{e^x})' = \boldsymbol{e^x}}$

9. Найти производную функции $y = \log_a x$

Составим приращение функции

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x$,

рассмотрим предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{воспользуемся вторым замечательным пределом}\\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\end{matrix}\right|=\frac{1}{x}\cdot\log_a e$$

$$\boxed{\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\cdot\log_a e=\frac{1}{x\cdot \ln a}}$$

10. $\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}}$

11. Найти производную функции $y(x)=arcsinx$

областью определения функции является отрезок $x\in[-1;1]$

множеством значения функции является отрезок $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

и $x=siny$

Учитывая, что производная обратной функции $y'(x)=\frac{1}{x'(y)}$, найдем производную арксинуса

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{(siny)'}=\frac{1}{cosy}=\frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{arcsinx})'=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}}$$

12. Найти производную функции $y(x) = arccosx$

областью определения функции является отрезок $x \in [-1; 1]$

множеством значения функции является отрезок $y \in [0; \pi]$

и $x = cosy$

Учитывая, что производная обратной функции $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$, найдем производную арккосинуса

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{(cosy)'} = \frac{-1}{siny} = \frac{-1}{\sqrt{1 - cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{arccosx})' = \frac{\mathbf{-1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}}$$

13. Найти производную функции $y(x) = arctgx$

областью определения функции является интервал $x \in (-\infty, +\infty)$

множеством значения функции является интервал $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

и $x = tgy$

Учитывая, что производная обратной функции $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$, найдем производную арктангенса

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2 x}} = cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{arctgx})' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \mathbf{x}^{\mathbf{2}}}}$$

14. Найти производную функции $y(x) = arcctgx$

областью определения функции является интервал $x \in (-\infty, +\infty)$

множеством значения функции является интервал $y \in (0; \pi)$

и $x = ctgy$

Учитывая, что производная обратной функции $\mathrm{y}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}'(y)}$, найдем производную арккотангенса

$$\mathrm{y}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}'(y)} = \frac{1}{(ctgy)'} = \frac{1}{\frac{-1}{sin^2x}} = -sin^2x = \frac{-1}{1+ctg^2x} = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{arcctgx})' = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{1+x^2}}}$$

5.8 Гиперболические функции

Название функции	**Вид функции**
синус гиперболический	$\boldsymbol{sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$
косинус гиперболический	$\boldsymbol{ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$
тангенс гиперболический	$\boldsymbol{th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$
котангенс гиперболический	$\boldsymbol{cth(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}$
Свойство гиперболических функций	$\boldsymbol{ch^2(x) - sh^2(x) = 1}$

15. Найти производную функции $y(x) = \mathrm{sh}(x)$ Гиперболический синус имеет вид

$y = \mathrm{sh}(x) = \frac{\boldsymbol{e^x - e^{-x}}}{\boldsymbol{2}}$ воспользуемся формулой для производной суммы функций, получим

$$\mathrm{y}'(\mathrm{x}) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$$

$$\boxed{\left(\mathbf{sh}(\boldsymbol{x})\right)' = \boldsymbol{ch}(\boldsymbol{x})}$$

16. Найти производную функции $y(x) = \mathrm{ch}(x)$ Гиперболический косинус имеет вид

$y = \mathrm{ch}(x) = \frac{\boldsymbol{e^x + e^{-x}}}{\boldsymbol{2}}$ воспользуемся формуло для производной суммы, получим

$$\mathrm{y}'(\mathrm{x}) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$$

$$\boxed{\left(\mathbf{ch}(\boldsymbol{x})\right)' = \boldsymbol{sh}(\boldsymbol{x})}$$

17. Найти производную функции $y(x) = \mathrm{th}(x)$

Гиперболический тангенс имеет вид $y = \mathrm{th}(x) = \frac{\boldsymbol{e^x - e^{-x}}}{\boldsymbol{e^x + e^{-x}}}$ Э используем формулу для производной частного, получим

$$\mathrm{y}'(\mathrm{x}) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{ch^2(x)}$$

$$\boxed{\left(\mathbf{th}(\boldsymbol{x})\right)' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{ch^2}(\boldsymbol{x})}}$$

18. Найти производную функции $y(x) = \mathrm{cth}(x)$

Гиперболический котангенс имеет вид $y = \operatorname{cth}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$,используем формулу для производной частного, получим

$$y'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x - e^{-x})\cdot(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})\cdot(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{-1}{sh^2(x)}$$

$$\boxed{\left(\mathbf{cth}(\boldsymbol{x})\right)' = \frac{\mathbf{-1}}{\boldsymbol{sh^2(x)}}}$$

Таблица основных производных

1	$(\mathbf{c})' = \mathbf{0}$	**10**	$(\boldsymbol{lnx})' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$
2	$(\mathbf{x^n})' = \mathbf{n \cdot x^{n-1}}$	**11**	$(\boldsymbol{arcsinx})' = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^2}}$
3	$(\boldsymbol{sinx})' = \boldsymbol{cosx}$	**12**	$(\boldsymbol{arccosx})' = \frac{\mathbf{-1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^2}}$
4	$(\boldsymbol{cosx})' = \boldsymbol{-sinx}$	**13**	$(\boldsymbol{arctgx})' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 + x^2}}$
5	$(\mathbf{tgx})' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos^2x}}$	**14**	$(\boldsymbol{arcctgx})' = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{1 + x^2}}$
6	$(\mathbf{ctgx})' = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{sin^2x}}$	**15**	$\left(\mathbf{sh}(\boldsymbol{x})\right)' = \boldsymbol{ch(x)}$

7	$\boldsymbol{(a^x)' = a^x \cdot lna}$	**16**	$\boldsymbol{(\mathrm{ch}(x))' = sh(x)}$
8	$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$	**17**	$\boldsymbol{(\mathrm{th}(x))' = \frac{1}{ch^2(x)}}$
9	$\boldsymbol{(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \cdot lna}}$	**18**	$\boldsymbol{(\mathrm{cth}(x))' = \frac{-1}{sh^2(x)}}$

5.8 Производная функции, заданной параметрически.

Функция $y = y(x)$ задана параметрически, если

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

где t – параметр, $t \in [t_1, t_2]$, причём предположим, что функция $x(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ однозначна, монотонна в строгом смысле и непрерывна, тогда у этой функции существует обратная функция $t = f(x)$, т.е.

$$y = y(t) = y(f(x)) = y(x)$$

Будем считать, что функции $x(t)$ и $y(t)$ на $[t_1, t_2]$ дифференцируемы, тогда производная $y(x)$ по x находится по формуле дифференцирования сложной функции

$$\boldsymbol{y'_x = y'_t(t) \cdot t'_x(x)} \text{ , где } \boldsymbol{t'_x(x) = \frac{1}{x'_t(t)}} \quad =>$$

$$\boxed{\boldsymbol{y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}}}$$

Пример5. Найти производную функции $y = y(x)$, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = a \cdot cos(2t) \\ y = b \cdot sin(3t) \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$$

$$y'_x = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \frac{\left(b \cdot \sin(3t)\right)'_t}{\left(a \cdot \cos(2t)\right)'_t} = \frac{3b \cdot \cos(t)}{-2a \cdot \sin(t)} = -\frac{3b}{2a} \cdot \mathrm{ctg}(t)$$

5.9 Производная функции, заданной неявно

.Если функция $y = y(x)$ задана неявно, т.е. в виде равенства $F(x, y) = 0$, то

для нахождения производной $y'_x(x)$ необходимо данное равенство дифференцировать по правилам дифференцирования сложной функции, предполагая, что $y(x)$ сложная функция.

Пример 6. Найти производную функции $y = y(x)$, заданной неявно

$$y^4 - x^3 \cdot lny + e^{-3y} - 3x^2 = 1$$

$$F(x, y) = y^4 - x^3 \cdot lny + e^{-3y} - 3x^2 - 1 = 0$$

$$(y^4 - x^3 \cdot lny + e^{-3y} - 3x^2 - 1)'_x = (0)'_x$$

$4y^3 \cdot y'_x - 3x^2 \cdot lny - \frac{y'_x}{y} \cdot x^3 - 3e^{-3y} \cdot y'_x - 6x = 0$ Приводя подобные члены окончательно имеем

$$y'_x \cdot \left(4y^3 - \frac{1}{y} \cdot x^3 - 3e^{-3y}\right) = 3x^2 \cdot lny + 6x$$

$$y'_x = \frac{3x^2 \cdot lny + 6x}{4y^3 - \frac{1}{y} \cdot x^3 - 3e^{-3y}}$$

Домашнее задание: доказать

Свойство гиперболических функций	$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$