

Тема4 Непрерывность функции

4.1 Определение непрерывной функции

Рассмотрим теперь класс функций, определенных в некоторой окрестности точки x_0 , в самой точке x_0 функция может быть определена или неопределённая

Def 1 Функция $y = f(x)$ называется непрерывной

в точке x_0 , если

1. она определена в точке x_0 ,
2. существует конечный предел при $x \rightarrow x_0$,

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

3. предел существует и равен значению функции в точке x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Записав определение на языке " $\varepsilon - \delta$ ", получим

Def 2 Функция $y = f(x)$ называется непрерывной

в точке x_0 , если

1. она определена в точке x_0 ,
2. функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0
3. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Следствие 1

Предел непрерывной функции равен функции от предела, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) \Rightarrow$$

Знак предела и знак непрерывной функции можно менять местами.

Лекция 4

Для получения еще одного определения непрерывной функции возьмем $x_0 \in$ ОДЗ функции $y = f(x)$ вместе с некоторой окрестностью. Дадим в точке x_0 приращение Δx любого знака. Тогда

функция $y = f(x)$ получит некоторое приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Из def 1 функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \Rightarrow$$

или

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0 \Rightarrow$$

или

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

Таким образом получаем третье определение функции $y = f(x)$ непрерывной в точке x_0 , с помощью приращений.

Def 3 Функция $y = f(x)$ называется непрерывной

в точке x_0 , если функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности точки x_0 , и предел приращения функции равен нулю, когда приращение аргумента стремится к нулю, т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение непрерывной функции.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

Def 4 Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в окрестности точки x_0 , если она непрерывна в каждой точке окрестности.

4.2 Свойства непрерывных функций

Th1. Элементарные функции непрерывны в любой точке своей области определения. (Элементарные функции это функции $\sin x$, $\cos x$, a^x , x^n , $\log_a x$)

Доказательство: Рассмотрим функцию $y(x) = \cos x$, воспользуемся def 3. Зафиксируем любую точку x_0 , дадим в точке x_0 приращение Δx , тогда функция $y = \cos x$ получит приращение

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos(x_0) = \\ &= -2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}_{\text{бесконечно малая при } \Delta x \rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}_{\text{ограниченная при } \forall x} = \Rightarrow \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= 0 \end{aligned}$$

т.е. функция $y(x) = \cos x$ непрерывна в точке x_0 , а ввиду произвольного выбора этой точки, функция $y(x) = \cos x$ непрерывна на всей числовой оси.

Th2 Сумма, разность, произведение, отношение (если знаменатель отличен от нуля) двух непрерывных функций есть функция непрерывная.

Доказательство: Доказательство вытекает из соответствующих теорем о пределах. Например, если функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ непрерывны в точке x_0 , то функции $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$ будет непрерывна в точке x_0 , так как

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = g(x_0)$$

Использовали теорему о пределе суммы функций .

Th3.(о непрерывности сложной функции)

Если функция $\varphi = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\varphi_0 = \varphi(x_0)$, а функция $y = F(\varphi)$ непрерывна в точке φ_0 , то функции $y(x) = F(\varphi(x))$ будет непрерывна в точке x_0 , т.е. непрерывная функция от непрерывной функции есть функция непрерывная.

Доказательство:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [F(\varphi(x))] = F\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)\right) = F\left(\varphi\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)\right) = F(\varphi(x_0)) = y(x_0)$$

4.3 Свойства непрерывных функций, непрерывных на отрезке

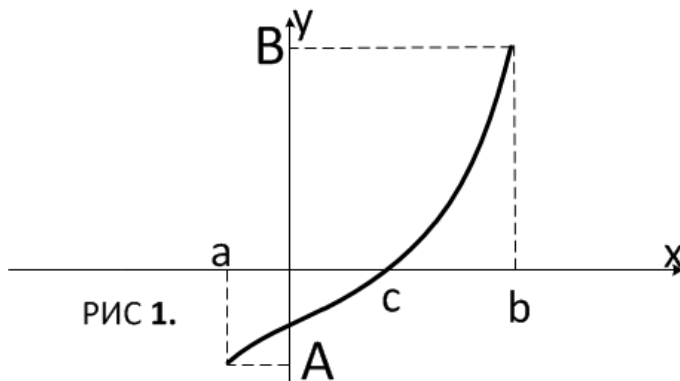
Def 5 Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках отрезка, а в концевых точках существуют два односторонних предела

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a) \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$$

Th4. (об обращении в нуль функции, непрерывной на отрезке)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и концах отрезка принимает значения различных знаков, то найдется хотя бы одна точка

$c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = 0$, т.е. непрерывная функция не может изменить знак не пройдя через нуль.



Геометрически это означает, что если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то найдется хотя бы одна точка $c \in [a, b]$ в которой график функции пересекает ось Ox .

Th5. (о промежуточном значении функции, непрерывной на отрезке)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ оси Ox и область изменения функции есть некоторый отрезок $[A, B]$ оси Oy , то для $\forall C \in [A, B] \subset Oy$ найдется хотя бы одна точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = C$, т.е. непрерывная функция должна пройти через все свои промежуточные значения или заполнить сплошь промежуток своего изменения.

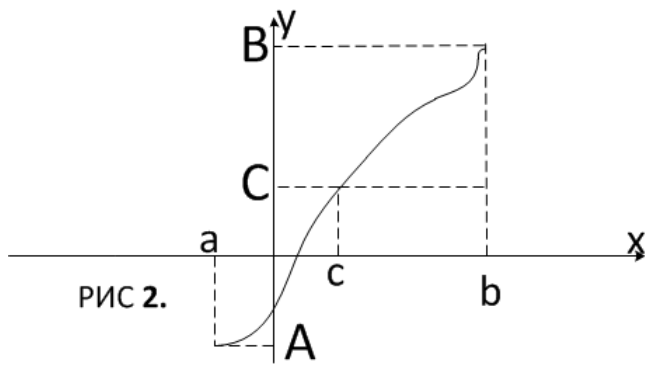


РИС 2.

Геометрически : если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и область изменения функции есть некоторый отрезок $[A, B]$ оси Oy , то для каждой ординаты y из множества значений функции обязательно найдется хотя бы одна точка абсциссы из области определения функции.

Th6.(об ограниченности функции, непрерывной на отрезке)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке ограничена, т.е. $\exists M > 0 : \forall x \in [a, b] \Rightarrow |f(x)| < M$.

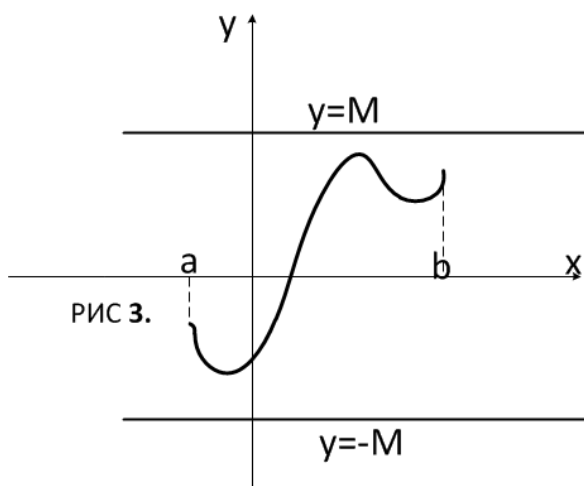


РИС 3.

Геометрически: если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то график этой функции целиком лежит в полосе от $y = -M$ до $y = M$.

Th7. (о наибольшем и наименьшем значении функции, непрерывной на отрезке)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то хотя бы в одной точке функция достигает своего наибольшего и хотя бы в одной точке функция достигает своего наименьшего значений

$$m = \min_{[a,b]} f(x) \quad \text{и} \quad M = \max_{[a,b]} f(x)$$

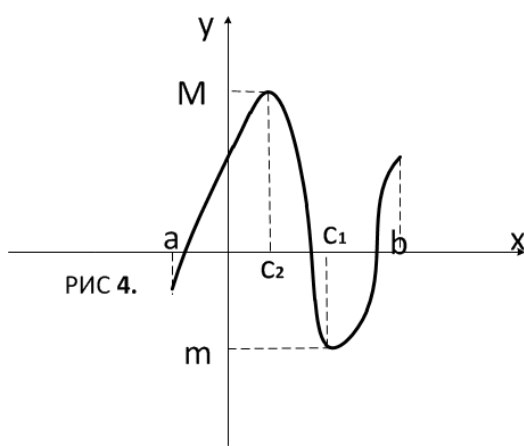


РИС 4.

Лекция 4

Геометрически: если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\exists c_1 \in [a, b] \text{ и } \exists c_2 \in [a, b] : \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow f(c_1) \leq f(x) \text{ и } f(c_2) \geq f(x)$$

график этой функции целиком лежит в полосе от $y = m$ до $y = M$.

4.4 Точки разрыва и их классификация

Если функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , но условия непрерывности из *def1* в точке нарушены, то в этой точке функция имеет разрыв

Def 5 Если не выполняется хотя бы одно условие из определения непрерывности функции в точке x_0 , то такая точка называется точкой разрыва функции $y = f(x)$.

Существует три вида точек разрыва:

1. Устранимая точка разрыва
2. Точка разрыва 1-го рода
3. Точка разрыва 2-го рода

Def 5 Если существует конечный предел функции $y = f(x)$

при $x \rightarrow x_0$ слева и существует конечный предел функции $y = f(x)$

при $x \rightarrow x_0$ справа, и они равны, но в самой точке x_0 функция либо не определена, либо, если определена, то не равна пределам функции слева и справа, тогда точка x_0 — устранимая точка разрыва.

т.е. если

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0) \text{ или } A = B \neq f(x_0)$$

Лекция 4

то точка x_0 — устранимая точка разрыва.

Пример1: Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$, найти точки разрыва, указать характер разрыва функции, доопределить функцию, если это возможно.

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$$

Решение: Функция $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ не определена в точке $x_0 = 0$ и поэтому исследуем функцию на разрыв в этой точке. По первому замечательному пределу

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow 0 + 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = B = \lim_{x \rightarrow 0 - 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$$

$A = B \neq f(0)$, так как функция не определена в точке $x_0 = 0$

Следовательно, точка $x_0 = 0$ — устранимая точка разрыва.

Доопределим функцию $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ для устранения разрыва функции.

Положим $f(0) = 3$, функция примет вид

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 3 & , \quad x = 0 \end{cases} ,$$

Полученная функция непрерывна в точке $x_0 = 0$, разрыв в точке $x_0 = 0$ устранен.

Def 7 Если существует конечный предел функции $y = f(x)$

при $x \rightarrow x_0$ слева и существует конечный предел функции $y = f(x)$

при $x \rightarrow x_0$ справа, и они не равны друг другу, то точка x_0 — **точка разрыва 1-го рода**.

т.е., если

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A \neq \infty$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = B \neq \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \text{ или } A \neq B$$

то точка x_0 — точка разрыва 1-го рода.

Пример 2: Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$, найти точки разрыва, указать характер разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-4|}{x-4} \cdot x - 1, & x \neq 4 \\ 2, & x = 4 \end{cases}$$

Решение: Рассмотрим точку $x_0 = 4$, раскроем модуль и вычислим пределы слева и справа при $x \rightarrow 4$

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A &= \lim_{x \rightarrow 4+0} \left(\frac{|x-4|}{x-4} x - 1 \right) = \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } x \rightarrow 4+0 \\ x > 4 \\ |x-4| = (x-4) \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4+0} \left(\frac{(x-4)}{x-4} x - 1 \right) = 3 \neq \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = B &= \lim_{x \rightarrow 4-0} \left(\frac{|x-4|}{x-4} x - 1 \right) = \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } x \rightarrow 4-0 \\ x < 4 \\ |x-4| = -(x-4) \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4-0} \left(\frac{-(x-4)}{x-4} x - 1 \right) = -5 \neq \infty\end{aligned}$$

$A \neq B$ или $3 \neq -5$

Существуют конечные пределы справа и слева не равные друг другу, следовательно, точка $x_0 = 2$ – точка разрыва 1-го рода.

Def 8 Если хотя бы один из односторонних пределов функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ не существует или равен бесконечности, то точка x_0 – **точка разрыва 2-го рода**.

т.е., если

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \quad \text{либо} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$$

или

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \infty \quad \text{либо} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \infty$$

то точка x_0 – точка разрыва 2-го рода.

Пример 3: Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$, найти точки разрыва, указать характер разрыва функции

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x-4}}$$

Лекция 4

Решение: Функция $f(x) = 4$ не определена в точке $x_0 = 4$, исследуем функцию на разрыв в этой точке.

Вычислим пределы слева и справа при $x \rightarrow 4$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow 4+0} 2^{\frac{1}{x-4}} = \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{1}{x-4} = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} 2^u = +\infty \end{array} \right| = +\infty$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = B = \lim_{x \rightarrow 4-0} 2^{\frac{1}{x-4}} = \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{1}{x-4} = -\infty \\ \lim_{u \rightarrow -\infty} 2^u = 0 \end{array} \right| = 0,$$

один из односторонних пределов функции $f(x) = 2^{\frac{1}{x-4}}$ при $x \rightarrow 4$ равен бесконечности, то точка $x_0 = 4$ — *точка разрыва 2-го рода*.