

## Тема 3. Бесконечно малые функции

### 3.1 Определение ограниченных и неограниченных функций

**Def 1** Функция называется ограниченной на некотором интервале  $(a, b)$ , если  $\exists M > 0 : \forall x \in (a, b) \Rightarrow |f(x)| < M$

**Def 2** | Функция  $y = f(x)$  называется ограниченной при  $x \rightarrow a$ , если она ограничена в некоторой окрестности точки  $a$ .

**Def 3** | Функция  $y = f(x)$  называется ограниченной

а) сверху на некотором интервале  $(a, b)$ , если  $\exists M > 0 : \forall x \in (a, b) \Rightarrow f(x) < M$

б) снизу на некотором интервале  $(a, b)$ , если  $\exists m > 0 : \forall x \in (a, b) \Rightarrow m < f(x)$

**Пример 1:**  $y = \operatorname{tg}(x)$  ограничена снизу при  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , а сверху не ограничена

### 3.2 Бесконечно малые функции

**Def 4** Бесконечно малой функцией (б/м) при  $x \rightarrow a$  называется функция  $\alpha(x)$  для которой  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$  т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$$

#### Th1( о связи функции с ее пределом)

Для того, чтобы число  $A$  было пределом функции  $f(x)$  необходимо и достаточно, чтобы разность между функцией и ее пределом была функцией б/м, т.е.  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - A = \alpha(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \end{cases}$ ,

#### Замечание

Любая б/м при  $x \rightarrow a$  функция ограничена при  $x \rightarrow a$ . Обратное неверно.

Например,  $y = \sin x$  - ограничена на  $(-\infty, +\infty)$  т.е.  $|\sin x| \leq 1$ . Но

при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$   $y = \sin x \rightarrow 1$ , т.е. не является б/м.

**Вывод:** Понятие ограниченной функции является более широким, чем понятие б/м функции.

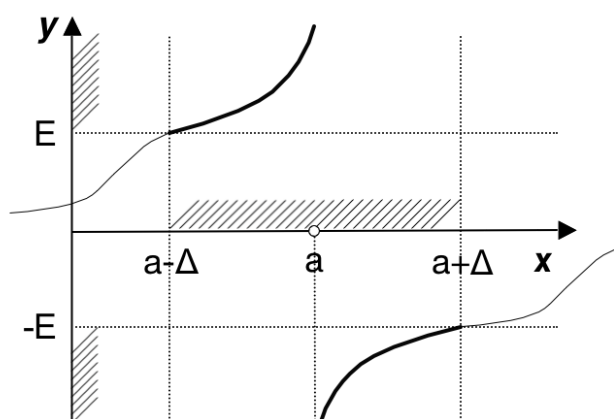
### 3.3 Бесконечно большие функции

**Def 5** Функции  $F(x)$  называется бесконечно большой функцией (б/б) при  $x \rightarrow a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \infty \text{ т. е.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |F(x)| > \varepsilon$$

Геометрическая интерпретация:  $\Delta = \delta$  и  $E = \varepsilon$



**Пример2:**  $y = \frac{1}{|x-2|}$  при  $x \rightarrow 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x-2|} = \infty$$

**Th2 (о связи б/б и б/м функций )**

1.Если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \quad (\alpha(x) \neq 0) \text{ и } g(x) = \frac{1}{\alpha(x)}, \text{ то}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

2. Если

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \text{ и } \alpha(x) = \frac{1}{g(x)}, \text{ то}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

### Свойства бесконечно малых функций 3.4

#### Th3 (о сумме б/м функций)

Сумма ограниченного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

#### Th4 (о произведении б/м функции на ограниченную)

Если

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \quad (\alpha(x) \neq 0) \text{ и}$$

функции  $y = f(x)$  ограничена в некоторой окрестности точки  $a$ , то функция  $f(x) \cdot \alpha(x)$  — б/м при  $x \rightarrow a$  или

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \alpha(x) = 0$$

**Следствие 1** Если  $C = \text{const}$ ,  $\alpha(x)$  — б/м при  $x \rightarrow a$  то  $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot \alpha(x) = 0$

**Следствие 2** Если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) \beta(x) = 0$

### 3.5 Сравнение бесконечно малых функций

Рассмотрим две б/м функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow a$ . Сравним эти функции, для этого оценим

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

**Def 6** Если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0, \text{ то}$$

$\alpha(x)$  – б/м функция более высокого порядка, чем  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow a$ .

**Def 7** Если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty, \text{ то}$$

$\beta(x)$  – б/м функция более высокого порядка, чем  $\alpha(x)$  при  $x \rightarrow a$ .

**Def 8** Если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \text{ то}$$

$\beta(x)$  и  $\alpha(x)$  – б/м функции одного порядка при  $x \rightarrow a$

**Def 9** Если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \text{ то}$$

$\beta(x)$  и  $\alpha(x)$  – являются эквивалентными бесконечно малыми функциями при  $x \rightarrow a$ , обозначается  $\boxed{\beta(x) \sim \alpha(x)}$

**Def 10** Если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^m} = C \neq \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}, \text{ то}$$

$\alpha(x)$  – б/м функция порядка  $m$  по сравнению с  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow a$

**Def 11** Если

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \quad \text{то}$$

б/м функции  $\beta(x)$  и  $\alpha(x)$  – не сравнимы.

**Пример 3**

$\alpha(x) = \ln(1+x)$  – б/м при  $x \rightarrow 0$ ,  $\beta(x) = x$  – б/м при  $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \ln e = 1$$

### 3.6 Свойства эквивалентных бесконечно малых функций

Для эквивалентных бесконечно малых функций справедливы три свойства:

1. рефлексивность:  $\alpha(x) \sim \alpha(x)$

2. симметричность: если  $\beta(x) \sim \alpha(x) \Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x)$

3. Транзитивность: если  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  и  $\beta(x) \sim \gamma(x) \Rightarrow \alpha(x) \sim \gamma(x)$

#### Th5 (о разности эквивалентных бесконечно малых функций)

Две б/м функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  будут эквивалентными при  $x \rightarrow a$  тогда и только тогда, когда разность между ними есть б/м функция более высокого порядка, чем каждая из данных функций, что можно записать

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \Leftrightarrow \alpha(x) - \beta(x) = \bar{o}(\alpha(x)) \text{ и } \alpha(x) - \beta(x) = \bar{o}(\beta(x))$$

Доказательство: необходимость

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = \gamma(x), \text{ где } \gamma(x) - \text{б/м функция при } x \rightarrow a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(x) - \beta(x) = \gamma(x) \cdot \beta(x) = \bar{o}(\beta(x)) \quad \blacksquare$$

достаточность

$\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$  разделим обе части на  $\beta(x) \Rightarrow$

$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = \frac{o(\beta(x))}{\beta(x)}$  и перейдем к пределу при  $x \rightarrow a \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(\beta(x))}{\beta(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x) \quad \blacksquare$$

### Th6:(о замене эквивалентными бесконечно малых функций)

Предел отношения двух бесконечно малых функций  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  не изменится, если заменить эти бесконечно малые функции эквивалентными бесконечно малыми функциями при  $x \rightarrow a$ , то есть

Если

$$\alpha(x) \sim \alpha_1(x); \beta(x) \sim \beta_1(x) \text{ при } x \rightarrow a \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Доказательство: Преобразуем тождественно

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) \cdot \alpha_1(x) \cdot \beta_1(x)}{\beta(x) \cdot \beta_1(x) \cdot \alpha_1(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

## 3.7 Основные эквивалентности

При  $x \rightarrow 0$  справедлива следующая таблица эквивалентных функций.

$$1. \sin(x) \sim x \text{ т.к. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$2. \operatorname{tg}(x) \sim x \text{ т.к. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x \cdot \cos x} = 1$$

$$3. \arcsin(x) \sim x \text{ т.к. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = \left| \begin{array}{l} \arcsin(x) = y \\ x = \sin y \end{array} \right| = \\ = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

$$4. \operatorname{arctg}(x) \sim x \text{ т.к. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg}(x) = y \\ x = \operatorname{tgy} \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tgy}} = 1$$

$$5. \ln(1+x) \sim x \text{ т.к. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

$$6. a^x - 1 \sim x \cdot \ln a \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \cdot \ln a} = \left| \begin{array}{l} a^x - 1 = y \\ x = \frac{\ln(1+y)}{\ln a} \end{array} \right| = \\ = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \cdot \ln a}{\ln(1+y) \cdot \ln a} = 1$$

$$7. e^x - 1 \sim x \quad a = e$$

$$8. 1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \text{ т.к. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1 \\ = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

$$9. (1+x)^m - 1 \sim mx \text{ т.к. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = \left| \begin{array}{l} (1+x)^m - 1 = y \\ m \ln(1+x) = \ln(1+y) \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{mx} \cdot \frac{m \ln(1+x)}{\ln(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{m \ln(1+x)}{mx} = 1$$

### **Основные эквивалентности**

при  $x \rightarrow 0$

$$\sin(x) \sim x$$

$$\operatorname{tg}(x) \sim x$$

$$\arcsin(x) \sim x$$

$$\operatorname{arctg}(x) \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$$

$$(1+x)^m - 1 \sim mx$$