

Тема2 Предел функции

2.1 Определение предела функции

Рассмотрим функцию $f(x)$ и оценим её поведение при изменении x :

при $x \rightarrow a$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ и т.д.

При $x \rightarrow a$, где a — число, будем предполагать, что функция $f(x)$ определена в окрестности точки a , за исключением, быть может, самой точки a .

Def1. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если

для любого сколь угодно малого числа эpsilon большего нуля найдется положительное число дельта, зависящее от эpsilon, такое, что из условия,

$$0 < |x - a| < \delta \text{ следует условие для функции } |f(x) - A| < \varepsilon$$

определение на языке " $\varepsilon - \delta$ " выглядит так:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

или, используя, определение окрестности точки, получим:

$$\forall U_\varepsilon(A) \exists \dot{U}_\delta(a) : \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A) \text{ словами это звучит так:}$$

Для любой эpsilon окрестности предела A найдется дельта окрестность точки a , такая что, как только x попадает в дельта окрестность точки a , так функция $f(x)$ попадает в эpsilon окрестность предела A . (геометрическая интерпретация)

Аналогично можно дать определение предела при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, предположив, что функция $f(x)$ определена при достаточно больших значениях аргумента

Def2. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \ |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

Геометрическая интерпретация :

2.2 Определение односторонних пределов функции

Введем понятие одностороннего предела функции $f(x)$, предположив при этом, что функция $f(x)$ определена слева (или справа) от точки a , то есть в интервале (x, a) (или в интервале (a, x))

Def3. Число A называется левосторонним пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a - 0$ или $x \rightarrow a^-$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \quad a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$$

Def4. Число A называется правосторонним пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a + 0$ или $x \rightarrow a^+$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \quad a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$$

Пример1: Найти левосторонний и правосторонний пределы функции $f(x)$

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Данная функция имеет левосторонний при $x \rightarrow 0 - 0$ и правосторонний при $x \rightarrow 0 + 0$ пределы, но не имеет предела при $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

Функция называется функцией знака и часто встречается в технических дисциплинах

Th1 Если функция $f(x)$ имеет в точке a оба односторонних предела (справа и слева) и эти пределы равны числу A , то функция $f(x)$ в точке a имеет предел, равный A .

Справедливо и обратное утверждение:

Из существования у функции $f(x)$ предела в точке a , равного числу A , следует существование в этой точке обоих односторонних пределов, также равных числу A .

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A \text{ и } \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

2.3 Свойства функции, имеющих предел

Th2 (об ограниченности функции, имеющей предел): Если

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

то функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки a .

Доказательство:

$$\text{Если } \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

Обозначим через $M = \max\{|A - \varepsilon|, |A + \varepsilon|\}$, тогда

$$-M < f(x) < M \text{ или } |f(x)| < M$$

то есть функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки a и теорема доказана.

Th3 (о сохранении знака предела): Если

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0,$$

то в некоторой окрестности предельной точки a функция $f(x)$ сохраняет знак предела, т.е. знак числа A .

Доказательство:

Пусть $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

Возьмём $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$, покажем, что $A - \varepsilon$ и $A + \varepsilon$ имеют знак, совпадающий со знаком числа A :

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{|A|}{2} > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2} \Rightarrow \end{aligned}$$

функция $f(x)$ одного знака с числом A в некоторой окрестности предельной точки a .

Th4 (о единстве предела): Если у функции $f(x)$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

то этот предел единственный.

Доказательство (методом от противного): Предположим, что у функции $f(x)$ существует два предела

при $x \rightarrow a$, различных между собой, т.е.

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{и} \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B, \quad \text{причем } B \neq A$$

В силу определения пределов это означает, что

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

Обозначим через $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ тогда при $0 < |x - a| < \delta$ будут выполняться оба неравенства: $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$$|A - B| = |f(x) - A + B - f(x)| \leq |f(x) - A| + |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |A - B| < \varepsilon$$

где ε — любое число, например возьмем $\varepsilon = \frac{|A-B|}{2} \Rightarrow |A - B| < \frac{|A-B|}{2}$,

получили противоречие, значит наше предположение было не верно, и

$$\exists \text{ единственный } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Th5 (о пределе промежуточной функции): Если в окрестности точки a

определены три функции $u(x)$, $f(x)$, $v(x)$, причем выполняется соотношение $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ и

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} u(x) = A \text{ и } \exists \lim_{x \rightarrow a} v(x) = A \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Доказательство: из существования пределов у функций $u(x)$ и $v(x) \Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0 : \forall x \ 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |u(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0 : \forall x \ 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |v(x) - B| < \varepsilon \Rightarrow$$

Обозначим через $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ тогда при $0 < |x - a| < \delta$ будут выполняться оба неравенства: $|u(x) - A| < \varepsilon$ и $|v(x) - B| < \varepsilon \Rightarrow$

$$A - \varepsilon < u(x) < A + \varepsilon \text{ и } A - \varepsilon < v(x) < A + \varepsilon \Rightarrow$$

$$A - \varepsilon < u(x) \leq f(x) \leq v(x) < A + \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Замечание: эту теорему часто называют теоремой о двух милиционерах.

2.4 Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

В общем виде

$$\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

В общем виде

$$\lim_{\alpha(x) \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)} = e$$

или

$$\lim_{\beta(x) \rightarrow 0} (1 + \beta(x))^{\frac{1}{\beta(x)}} = e$$

Доказательство: следует из доказанного

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Пусть $x \rightarrow +\infty$,

$n < x < n + 1$, где n целое положительное число

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow$$

Найдем пределы последовательностей в левой и правой части неравенства.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

Тогда по теореме о пределе промежуточной функции

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Пусть теперь $x \rightarrow -\infty$, введем переменную $t = -(x+1)$ при $x \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$