Тема1 Предел последовательности

1.1 Определение множества вещественных чисел

Def 1 Множество-это любое собрание определенных и различимых между собой элементов мыслимое как единое целое

Например, множество корней уравнения или множество четных чисел. Обозначается множество A= {a}

Простейшими множествами являются также следующие:

1) Числа 1,2,3, … - называются натуральными числами. Множество натуральных чисел обозначается $N = \{1,2,3, \dots \dots\}$

2) Множество целых чисел обозначается $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \dots\}$

3) Множество рациональных чисел обозначается $Q = \left\{ \frac{p}{q} \ : \ p \in Z\ ,\ q \in N \right\}$

4) Множество действительных(вещественных) чисел обозначается

$$R = \left\{ \frac{p}{q} \ : \ p \in Z\ ,\ q \in N + \text{множество иррациональных чисел} \right\}$$

Введем обозначения, которыми будем пользоваться для записи математических понятий и утверждений:

Квантор общности: $\forall$ − означает "любой"

Квантор принадлежности: $\in$ − означает "принадлежит"

Квантор существования: $\exists$ − означает "существует"

Квантор не существования: $\nexists$ − означает "не существует"

$$A \ => \ B \ - \text{означает, из утверджения } A \ \text{ следует утверждение } B$$

$$A \ <= \ B \ - \text{означает, из утверджения } B \ \text{ следует утверждение } A$$

$$A \ <=> \ B \ - \text{означает, утверждение } A \ \text{ и утверждение } B \text{ равносильны}$$

Def 2 Окрестностью точки a радиуса ε называется множество точек числовой прямой таких, что $|x - a| < \varepsilon$

Обозначение: $U_\varepsilon(a) = \{x: |x-a| < \varepsilon\}$

Геометрическое представление:

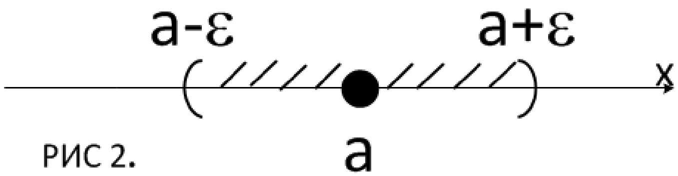

РИС 2.

Def 3 Проколотой окрестностью точки a радиуса ε называется множество точек числовой прямой таких, что $0 < |x-a| < \varepsilon$

Обозначение: $\dot{U}_\varepsilon(a) = \{x: 0 < |x-a| < \varepsilon\}$

Геометрическое представление:

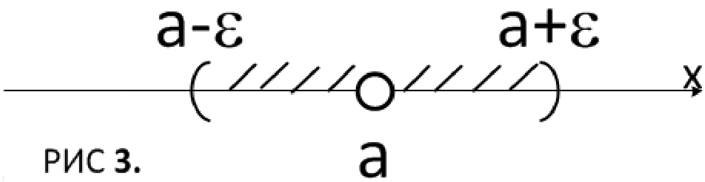

РИС 3.

Def 4 Точка x_0 называется предельной точкой множества, если в $\forall$

её окрестности $\exists$ хотя бы одна точка этого множества, отличная от x_0.

Пример1*:* Доказать, что в $\forall$ окрестности предельной точки содержится бесконечное число точек данного множества.

Доказательство:

Пусть x_0 – предельная точка множества. $U_\varepsilon(x_0)$ – произвольная окрестность радиуса ε

Тогда по определению предельной точки $\exists\, x_1 \in U_\varepsilon(x_0)$, пусть $\varepsilon_1 = |x_1 - x_0|$

В окрестности $U_{\varepsilon_1}(x_0)$ по определению предельной точки x_0

$\exists\, x_2 \in U_{\varepsilon_1}(x_0)$, пусть $\varepsilon_2 = |x_2 - x_0|$ и так далее, бесконечное множество действительных чисел, расположенных в соответствии с возрастанием номеров $x_1, x_2, x_3, \dots, \dots x_n, \dots$ лежат в окрестности предельной точки x_0 .

Таким образом, утверждение доказано.

1.2 Определение предела последовательности

Def 5. Последовательность – это функция, определенная на множестве натуральных чисел, множество значений которой может состоять из элементов любой природы: чисел, точек пространства, функций, векторов, множеств и т.д.

Def 6. Числовая последовательность – это функция, определенная на множестве натуральных чисел, множество значений которой состоит из действительных чисел.

Пример2*:* написать пять первых членов для каждой из следующих числовых последовательностей

$$1.\ \ x_n = \frac{4}{n}$$

$$2.\ \ x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

$$3.\ \ x_n = (-1)^{n+1}$$

$$4.\ \ x_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

5 . $x_n = 3n \cdot sin(n + 1)$

Def 7. Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если x_n отличается от a сколь угодно мало, начиная с некоторого номера N.

Def 8. Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon) > 0 \quad : \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon \quad <=> \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

или $x_n \to a$ при $n \to \infty$

Если

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n\ ,$$

то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к a.

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \quad <=> \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon) > 0 \quad : \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

Пример3: найти предел числовой последовательности

$$x_n = \frac{4}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n \ = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \ = 0$$

З**амечание**: Если $a = \lim_{n\to\infty} x_n$,

то только число a может являться предельной точкой множества членов последовательности. Так как , вне любой окрестности числа a содержится конечное число членов последовательности. Следовательно, только a −может быть предельной точкой этого множества.

1.3 Неравенство Бернулли

$$\boxed{(\mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{n}} \geq \mathbf{1} + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}}$$

Докажем неравенство Бернулли. Для этого воспользуемся методом математической индукции.

1. проверка для $n = 1 \qquad 1 + \alpha = 1 + 1 \cdot \alpha$

2. предположение: пусть для $n = k$ оно выполняется $(1 + \alpha)^k \geq 1 + k \cdot \alpha$

3. докажем, что справедливо и для $n = k + 1$

$$(1 + \alpha)^{k+1} = (1 + \alpha)^k \cdot (1 + \alpha) \geq (1 + k \cdot \alpha) \cdot (1 + \alpha) =$$

$= 1 + (k + 1) \cdot \alpha + k \cdot \alpha^2 \geq 1 + (k + 1) \cdot \alpha$ т.е. неравенство доказано

1.4 Свойства сходящихся последовательностей

1)Предположим

$$\exists \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{и} \ \exists \quad \lim_{n\to\infty} y_n = a \ , \quad \forall n > N\ x_n \leq z_n \leq y_n$$

тогда

$$\exists \quad \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

2) Предположим

$$\exists \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{и} \; \exists \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b\,,$$

тогда

$$\exists \quad \lim_{n\to\infty}(c_1 \cdot x_n + c_2 \cdot y_n) = c_1 \cdot a + c_2 \cdot b$$

3) Предположим

$$\exists \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{и} \; \exists \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b\,,$$

тогда

$$\exists \quad \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$$

4) Предположим

$$\exists \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a \neq 0 \quad ,$$

тогда

$$\exists \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{a}$$

Пример 4*:* найти предел числовой последовательности

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n\cdot n}{2\cdot(n+1)} - \dfrac{(2n+1)\cdot(n+1)}{2\cdot(n+1)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-3n-1}{2n+2}\right) = \dfrac{-3}{2}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = 0$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n\cdot\sin\left((n+1)!\right)}{n^2-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\left((n+1)!\right)}{n-\dfrac{1}{n}}\right) = 0$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+4)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!\cdot(n+3+1)}{(n+2)!\cdot(n+3)\cdot(n+4)}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)}{(n+3)\cdot(n+4)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+3)}=0$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{\frac{1}{n}}-1}{5^{\frac{1}{n}}+1}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

1.5 Число e

Def 9. Числовая последовательность $\{x_n\}$, называется ограниченной , если

$$\exists\, M>0 \quad : \forall n \quad |x_n|<M$$

Def 10. Числовая последовательность $\{x_n\}$, называется монотонно возрастающей, если $x_1\le x_2\le x_3\le\cdots,\ldots\le x_n\le$

Th1 Монотонно возрастающая ограниченная последовательность имеет предел. (без доказательства)

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и покажем, что это монотонно возрастающая последовательность

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{n^n\cdot(n+2)^{n+1}}{(1+n)^n\cdot(1+n)^{n+1}}=\frac{(n+2)\cdot(n^2+2n)^n}{(n+1)\cdot(n^2+2n+1)^n}=$$

$$=\frac{(n+2)}{(n+1)}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+n)^2}\right)^n\ge\frac{(n+2)}{(n+1)}\cdot\left(1-\frac{n}{(1+n)^2}\right)=\frac{(n+2)\cdot(n^2+n+1)}{(1+n)^3}=$$

$$=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}>1 \Rightarrow \qquad x_{n+1}>x_n \Rightarrow$$

$x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ – монотонно возрастающая последовательность

Теперь рассмотрим последовательность $\{y_n\}$ $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и покажем, что это монотонно убывающая последовательность

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2}}{(1+n)^{n+1}\cdot(1+n)^{n+2}}=\frac{(n+2)\cdot(n^2+2n)^{n+1}}{(n+1)\cdot(n^2+2n+1)^{n+1}}=$$

$$=\frac{(n+2)}{(n+1)}\cdot\left(\frac{n^2+2n}{(1+n)^2}\right)^{n+1}=\frac{(n+2)}{(n+1)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n\cdot(n+2)}\right)^{n+1}}\le$$

$$\le\frac{(n+2)}{(n+1)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1+n}{n\cdot(n+2)}\right)}=\frac{(n+2)}{(n+1)}\cdot\frac{n\cdot(n+2)}{n^2+3n+1}=$$

$$=\frac{n^3+4n^2+4n}{n^3+4n^2+4n+1}<1 \Rightarrow \qquad y_{n+1}<y_n \Rightarrow$$

$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ – монотонно убывающаяя последовательность

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \quad x_n<y_n \Rightarrow$$

$$x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_n\le \ldots\le y_n\le\cdots\le y_3\le y_2\le y_1$$

Таким образом последовательность $\{x_n\}$ $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ –ограниченная и монотонно возрастающая последовательность => по **Th** 1 =>

$$\exists \quad \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2{,}7182821828\ldots$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}$$

Символ $\boldsymbol{e}$ для обозначения этого числа введен в 1731 году Эйлером(1707-1783)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n=e^c}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e \text{ , где } \alpha_n - \text{бесконечно малая последовательность}}$$

Пример 5*:* найти предел числовой последовательности

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{(n+2)\cdot\frac{n}{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty}(e)^{\frac{n}{n+2}} = e$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-2}{n^3-4}\right)^{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^3-4}\right)^{\frac{n^3-4}{2}\cdot\frac{2}{n^3-4}\cdot n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}(e)^{\frac{2}{n^3-4}\cdot n^3} = e^2$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+7}\right)^n = \frac{1}{e}$