Темы 15-16 Функции нескольких переменных.

15.1 Экстремум функции нескольких переменных.

<u>Def 1</u> Точка P_0 трех (двух)-мерного пространства $P_0 \in R_3$

($P_0 \in R_2$) называется точкой локального максимума (или минимума) функции нескольких переменных $u = f(x, y, z)$, если существует такая её проколотая окрестность, что для всех точек, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство

$$f(P_0) \geq f(P) \qquad (\ f(P_0) \leq f(P) \ )$$

<u>Def 2</u> Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума функции.

<u>Def 3</u> Значение функции в точке локального экстремума называется локальным экстремумом функции.

Th 1(Необходимое условие экстремума). В точке локального экстремума P_0 все частные производные первого порядка равны нулю, если они существуют.

<u>Следствие.</u> Если точка P_0 является точкой локального экстремума дифференцируемой в ней функции, то $d\big(f(P_0)\big) = 0$.

<u>Def 4</u> Точка, в которой все частные производные функции $u = f(x, y, z)$ обращаются в нуль или не существуют, называется критической точкой.

<u>Def 5</u> Точка, в которой все частные производные функции $u = f(x, y, z)$ обращаются в нуль, называется стационарной точкой.

<u>Замечание</u>. Стационарная точка может быть точкой локального экстремума, а может и не быть ею. Рассмотрим функцию двух переменных

$z = f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ (гиперболический параболоид). Точка $P_0(0; 0)$ является стационарной, т. к.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{a^2} \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(0;0) = \frac{2\cdot 0}{a^2} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{b^2} \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y}(0;0) = \frac{-2\cdot 0}{b^2} = 0$$

Рассмотрим произвольную окрестность точки $P_0(0;0)$. Возьмем два сечения окрестности плоскостями Oxz и Oyz . В сечении первой плоскостью Oxz (или $y = 0$) функция двух переменных $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ представит параболой $z = \frac{x^2}{a^2}$, ветви которой направлены вверх и точка $P_0(0;0)$ является минимумом $f(P_0(0;0)) < f\big(P(x;0)\big)$.

В сечении плоскостью Oyz (или $x = 0$) функция двух переменных $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ представит параболой $z = \frac{-y^2}{a^2}$, ветви которой направлены вниз и точка $P_0(0;0)$ является максимумом $f(P_0(0;0)) > f\big(P(0;y)\big)$.

Следовательно, для всех точек, принадлежащих окрестности точки $P_0(0;0)$ ни одно из неравенств

$$f(P_0) \geq f(P) \qquad (\; f(P_0) \leq f(P) \;)$$

не выполняется. И точка $P_0(0;0)$ не является ни максимумом , ни минимумом функции двух переменных $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Точки указанного типа называют точками **минимакса.**

Пусть функция $u = f(P)$ непрерывна вместе с частными производными до второго порядка включительно в окрестности стационарной точки P_0. Определим условия, при которых стационарная точка P_0 будет являться точкой локального экстремума функции $u = f(P)$.

Формула Тейлора для функции двух переменных $z = f(x, y)$ имеет вид

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y - y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_\xi,y_\xi)\cdot\left(x - x_\xi\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_\xi,y_\xi)\cdot\left(x - x_\xi\right)\left(y - y_\xi\right) +\right.$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_\xi, y_\xi)\cdot(y-y_\xi)^2\Bigg]$$

с остаточный членом формулы Тейлора в форме Лагранжа

Здесь $x_\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ $y_\xi = y_0 + \theta(y - y_0)$ $0 < \theta < 1.$

Учитывая, что точка $P_0(x_0, y_0)$ стационарная точка

(т. е. $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$), из формулы Тейлора получаем, что знак разности $f(x,y) - f(x_0, y_0)$ определяется знаком выражения стоящего в скобках.

$$f(P) - f(P_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \tag{15.1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_\xi, y_\xi)\cdot(x-x_\xi)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_\xi, y_\xi)\cdot(x-x_\xi)(y-y_\xi) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_\xi, y_\xi)(y-y_\xi)^2\right]$$

Для определения знака разности $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ преобразуем последнее выражение, выделяя полный квадрат

$$f(P) - f(P_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_\xi)}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_\xi)\cdot(x-x_\xi) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_\xi)\cdot(y-y_\xi)\right)^2 + \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_\xi)}\cdot(y-y_\xi)^2\right]$$

(15.2)

Замечание: проверить правильность формулы (15.2) раскрытием скобок.

Учитывая, что дифференциал второго порядка для функции двух переменных определяется формулой

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cdot dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2,$$

которая имеет ту же структуру, что и выражение в скобках(15.1), *можно сказать, что знак выражения $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ совпадает со знаком дифференциала второго порядка.*

Дифференциалу второго порядка можно поставить в соответствие матрицу А

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \end{pmatrix}$$

главные миноры, которой $M_1 = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\, x_0, y_0)\right| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\, x_0, y_0)$ и

$$M_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Тогда выражение (4.2) можно представить в более компактной записи

$$f(P) - f(P_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{M_1} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_\xi\,) \cdot (x - x_\xi) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\,P_\xi) \cdot (y - y_\xi)\right)^2 + \frac{M_2}{M_1} \cdot (y - y_\xi)^2\right]$$

Так как по условию частные производные второго порядка функции $f(x, y)$ непрерывны, то знак выражения

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{M_1} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0\,) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\,P_0) \cdot (y - y_0)\right)^2 + \frac{M_2}{M_1} \cdot (y - y_0)^2\right]$$

будет иметь место и в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$

или совпадать со знаком выражения (4.2).

При этом получаем, что

1. если $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$, то выражение $f(P) - f(P_0) > 0$

для всех точек $P(x, y)$, принадлежащих проколотой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ и, следовательно, точка P_0- точка локального минимума.

2. если $M_1 < 0$ и $M_2 > 0$, то выражение $f(P) - f(P_0) < 0$

для всех точек $P(x, y)$, принадлежащих проколотой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ и, следовательно, точка P_0- точка локального максимума.

3. в случаях $M_2 < 0$ ($M_1 > 0$ и $M_2 < 0$ или $M_1 < 0$ и $M_2 < 0$) знак выражения $f(P) - f(P_0)$ непостоянен и, следовательно, точка P_0- точка не является ни минимум, ни максимумом .

4. если $M_1 = 0$ или $M_2 = 0$, точка P_0- точка может быть или не быть точкой минимума или максимума. В этом случае требуются дополнительные исследования.

Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$, учитывая, что точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ стационарная точка (т. е. $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 0$), из формулы Тейлора получаем, что знак разности $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ определяется знаком выражения стоящего в скобках.

$$f(P) - f(P_0) = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_\xi)\cdot(x - x_\xi)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_\xi)(y - y_\xi)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P_\xi)\cdot(z - z_\xi)^2 + \right.$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_\xi)\cdot(x - x_\xi)(y - y_\xi) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(P_\xi)\cdot(x - x_\xi)(z - z_\xi) +$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(P_\xi)\cdot(z - z_\xi)(y - y_\xi)\right] \qquad (15.3)$$

Здесь формула Тейлора для функции трех переменных записана с остаточным членом в форме Лагранжа

$$x_\xi = x_0 + \theta(x - x_0) \qquad y_\xi = y_0 + \theta(y - y_0) \qquad z_\xi = z_0 + \theta(z - z_0) \qquad 0 < \theta < 1.$$

Для определения знака разности $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$ преобразуем последнее выражение, выделяя полные квадраты

Учитывая, что дифференциал второго порядка для функции трех переменных определяется формулой

$$d^2 f(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial}{\partial z}\cdot dz\right)^2 f =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz,$$

которая имеет ту же структуру, что и выражение в скобках(15.3), *можно сказать, что знак выражения* $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$ *совпадает со знаком дифференциала второго порядка.*

Полному второму дифференциалу функции $u = f(x,y,z)$ соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Главные миноры, которой $M_1 = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\, x_0, y_0)\right| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\, x_0, y_0)$

$$M_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

$$M_3 = \det A = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

Тогда выражение (15.3) можно представить в более компактной записи

$$f(P) - f(P_0) = f(x,y,z) - f\left(x_0, y_0, z_0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M_1}} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_\xi\,) \cdot (x - x_\xi) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\,P_\xi) \cdot (y - y_\xi) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\,P_\xi) \cdot (z - z_\xi)\right)^{\mathbf{2}} + \right.$$

$$+ \frac{\boldsymbol{M_1}}{\boldsymbol{M_2}} \cdot \left(\frac{M_2}{M_1} \cdot (y - y_\xi) + \frac{1}{M_1} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\,P_\xi) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\,P_\xi)\right) \cdot (z - z_\xi)\right)^{\mathbf{2}} +$$

$$\left. + \frac{\boldsymbol{M_3}}{\boldsymbol{M_2}} \cdot (z - z_\xi)^{\mathbf{2}}\right] \qquad (15.4)$$

Так как по условию частные производные второго порядка функции $f(x,y,z)$ непрерывны, то знак выражения

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M_1}}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P_0)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(P_0)\cdot(z-z_0)\right)^{\mathbf{2}}+\right.$$

$$+\frac{\boldsymbol{M_1}}{\boldsymbol{M_2}}\cdot\left(\frac{M_2}{M_1}\cdot(y-y_0)+\frac{1}{M_1}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(P_0)-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(P_0)\right)\cdot(z-z_0)\right)^{\mathbf{2}}+$$

$$\left.+\frac{\boldsymbol{M_3}}{\boldsymbol{M_2}}\cdot(z-z_0)^{\mathbf{2}}\right]$$

будет иметь место и в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z)$

или совпадать со знаком выражения (15.4).

При этом получаем, что

1. если $\mathrm{M}_1 > 0$, $\mathrm{M}_2 > 0$ и $\mathrm{M}_3 > 0$, то выражение $\mathrm{f(P)} - \mathrm{f(P_0)} > 0$ для всех точек $\mathrm{P(x, y, z)}$, принадлежащих проколотой окрестности точки $\mathrm{P_0(x_0, y_0, z_0)}$ и, следовательно, точка $\mathrm{P_0}$- точка локального минимума.

2. если $\mathrm{M}_1 < 0$, $\mathrm{M}_2 > 0$ и $\mathrm{M}_3 < 0$, то выражение $\mathrm{f(P)} - \mathrm{f(P_0)} < 0$

для всех точек $\mathrm{P(x, y)}$, принадлежащих проколотой окрестности точки $\mathrm{P_0(x_0, y_0)}$ и, следовательно, точка $\mathrm{P_0}$- точка локального максимума.

3. в случаях $\mathrm{M}_2 < 0$ знак выражения $\mathrm{f(P)} - \mathrm{f(P_0)}$ непостоянен и, следовательно, точка $\mathrm{P_0}$- точка не является ни минимум, ни максимумом .

4. если $\mathrm{M}_1 = 0$, $\mathrm{M}_2 = 0$ или $\mathrm{M}_3 = 0$, точка $\mathrm{P_0}$- точка может быть или не быть точкой минимума или максимума. В этом случае требуются дополнительные исследования.

Объединяя все выше сказанное, сформулируем теорему

Th 2 (Достаточное условие экстремума).

Пусть функция $u = f(P)$ непрерывна вместе с частными производными до второго порядка включительно в окрестности стационарной точки P_0 и главные миноры матрицы A , составленной из частных производных второго порядка, соответствующие полному дифференциалу второго порядка $d^2f(x)$ в этой точке определены, то

1. если все главные миноры больше нуля, точка P_0- точка локального минимума.

2. если все главные миноры чередуют знак, начиная с отрицательного , точка P_0- точка локального максимума.

3. в других случаях , при условии, что главные миноры отличны от нуля, точка P_0- точка не является ни минимум, ни максимумом .

4. если хоть один главный минор равен нулю, точка P_0- точка может быть или не быть точкой минимума или максимума. В этом случае требуются дополнительные исследования.

15.2 План исследования на экстремум функций двух переменных $\mathbf{z = f(x, y)}$.

1. Используя необходимые условия экстремума, находим стационарные точки P_c^i :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Решением системы являются стационарные точки $P_c^i(x_c^i, y_c^i)$

2. Вычисляем частные производные второго порядка в каждой из найденных стационарных точек $P_c^i(x_c^i, y_c^i)$. Выражение для дифференциала второго порядка функции $z = f(x, y)$ имеет вид:

$$d^2z(\ P_c^i) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\ P_c^i) \cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(\ P_c^i) \cdot dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\ P_c^i) \cdot dy^2$$

Составляем матрицу $A=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{pmatrix}$,

с главными минорами $M_1=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $M_2=detA=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$

3. Определяем, является ли стационарная точка P_c^i точкой максимума или минимума функции $z=f(x,y)$

а) если $M_1>0$ и $M_2>0$, то P_c^i - точка локального минимума.

б) если $M_1<0$ и $M_2>0$, то P_c^i - точка локального максимума.

в) в остальных случаях стационарная точка P_c^i - не является точкой экстремума, если $M_2\neq 0$, $M_1\neq 0$.

г) если $M_2=0$ или $M_1=0$, то необходимы дополнительные исследования.

<u>Пример 1.</u> Найти и исследовать точки экстремума функции

$$\mathrm{z(x,y)}=\frac{(x+2)^3}{64}-\frac{(y-3)^3}{125}+6xy-18x+12y$$

1. Используя необходимые условия экстремума, находим стационарные точки P_c^i :

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{3(x+2)^2}{64}+6y-18=0\\ -\frac{3(y-3)^2}{125}+6x+12=0\end{cases}\text{или}\begin{cases}\frac{3(x+2)^2}{64}+6(y-3)=0\\ -\frac{3(y-3)^2}{125}+6(x+2)=0\end{cases}$$

Система имеет два решения: $(-2;3)$ и $(158;-197)$

Имеем две стационарные точки $P_c^1=(-2;3)$ и $P_c^2=(158;-197)$, необходимо проверить являются они точками локального экстремума или нет.

2. Вычисляем частные производные второго порядка.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\frac{3(x+2)^2}{64}+6y-18\qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-\frac{3(y-3)^2}{125}+6x+12$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{3\cdot 2\cdot(x+2)}{64} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{-3\cdot 2\cdot(y-3)}{125}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 6$$

Выражение для второго дифференциала функции $z = \mathrm{z}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ имеет вид:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cdot dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2 =$$

$$= \left(\frac{3\cdot 2\cdot (x+2)}{64}\right)\cdot dx^2 + 2\cdot 6\cdot dxdy + \left(\frac{-3\cdot 2\cdot (y-3)}{125}\right)\cdot dy^2$$

Составляем матрицу $A(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{3\cdot 2\cdot(x+2)}{64} & 6 \\ 6 & \frac{-3\cdot 2\cdot(y-3)}{125} \end{pmatrix}$

Матрица А, соответствующая второму дифференциалу, зависит от точки $P_c^i(x,y)$.

3. Определяем, являются ли стационарные точки $P_c^1 = (-2;3)$ и $P_c^2 = (158;-197)$ точками максимума или минимума функции $z = f(x,y)$. Для этого подставляем координаты стационарных точек P_c^1 и P_c^2 в выражение для $A(x,y)$.

Для первой стационарной точки $P_c^1 = (-2;3)$ получим

$$A(-2{,}3) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

с главными минорами $M_1 = 0$ и $M_2 = detA = -36$

ВЫВОД: стационарная точка $P_c^1 = (-2;3)$- не является точкой экстремума.

Для второй стационарной точки $P_c^2 = (158;-197)$ получим

$$A(158;-197) = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 6 & 4{,}8 \end{pmatrix}$$

с главными минорами $M_1 = 15 > 0$ и $M_2 = detA = 36 > 0$

<u>вывод</u>: стационарная точка $P_c^2 = (158; -197)$- точка локального минимума.

Ответ: функция $z = \frac{(x+2)^3}{64} - \frac{(y-3)^3}{125} + 6xy - 18x + 12y$ имеет одну точку экстремума, точка $P_c^2 = (158; -197)$- точка локального минимума.

15.3 План исследования на экстремум функций трех переменных u=f(x,y,z).

1. Используя необходимые условия экстремума, находим стационарные точки P_c^i :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Решением системы являются стационарные точки $P_c^i(x_c^i, y_c^i)$

2. Вычисляем частные производные второго порядка в каждой из найденных стационарных точек $P_c^i(x_c^i, y_c^i)$. Выражение для дифференциала второго порядка функции $u = f(x,y,z)$ имеет вид:

$$d^2u(P_c^i) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_c^i)\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(P_c^i)\cdot dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_c^i)\cdot dy^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}(P_c^i)\cdot dxdz + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(P_c^i)\cdot dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}(P_c^i)\cdot dzdy$$

Составляем матрицу $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{pmatrix}$

с главными минорами

$$M_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ и } \quad M_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 \text{ и}$$

$$M_3 = detA = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

3. Определяем является ли стационарная точка P_c^i точкой максимума или минимума функции u=f(x,y,z).

а) если $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ и $M_3 > 0$, то P_c^i - точка локального минимума.

б) если $M_1 < 0$ и $M_2 > 0$ и $M_3 < 0$, то P_c^i - точка локального максимума.

в) в остальных случаях стационарная точка P_c^i - не является точкой экстремума, если $M_3 \neq 0$, $M_2 \neq 0$, $M_1 \neq 0$.

г) если $M_3 = 0,$ или $M_2 = 0,$ или $M_1 = 0$, то необходимы дополнительные исследования.

__**Пример 2.**__ Найти и исследовать точки экстремума функции

$$\mathrm{u(x,y,z)} = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + xy + 4yz - 4z$$

1. Используя необходимые условия экстремума, находим стационарные точки P_c^i :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4y + x + 4z = 0 \\ 10z + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

Решением системы является стационарная точка $P_c^1 = (\frac{8}{19}, \frac{-16}{19}, \frac{14}{19})$

2. Вычисляем частные производные второго порядка в найденной стационарной точке

$P_c^i = (\frac{8}{19}, \frac{-16}{19}, \frac{14}{19})$.

$\frac{\partial u}{\partial x}(x.y,z) = 2x + y$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 1$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y}(x.y,z) = 4y + x + 4z$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 4$

$\frac{\partial u}{\partial z}(x.y,z) = 10z + 4y - 4$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 4$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 10$

Выражение для второго дифференциала функции $u = f(x, y, z)$ имеет вид:

$$d^2u(P_c^i) = 2dx^2 + 2 \cdot 1 \cdot dxdy + 4dy^2 + 2 \cdot 0 \cdot dxdz + 10dz^2 + 2 \cdot 4 \cdot dzdy$$

или $\quad d^2u(\ P_c^i) = 2dx^2 + 2dxdy + 4dy^2 + 10dz^2 + 8dzdy =$

$$= \frac{1}{2}(2dx + dy)^2 + \frac{1}{2 \cdot 7}(7dx + 8dz)^2 + \frac{38}{7}dz^2$$

Составляем матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

главными минорами, которой являются

$M_1 = 2$ и $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (1)^2 = 7$ и

$$M_3 = detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 38$$

3. Определяем, является ли стационарная точка $P_c^1 = (\frac{8}{19}, \frac{-16}{19}, \frac{14}{19})$ точкой локального экстремума (точкой максимума или минимума) функции u=f(x,y,z).

Так как $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ и $M_3 > 0$, то P_c^1 - точка локального минимума.

Ответ: точка $P_c^1 = (\frac{8}{19}, \frac{-16}{19}, \frac{14}{19})$ является точкой минимума функции $\mathrm{u(x, y, z)} = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + xy + 4yz - 4z$.