Темы 13-14 Функции нескольких переменных.

13. 1 Дифференцирование функций нескольких переменных.

Напомним основные понятия из прошлой лекции

Def 1 Частным приращением функции $\mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ по переменной x (или y или z) называется приращение $\Delta_{\mathrm{x}}\mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$

(или $\Delta_{\mathrm{y}}\mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y} + \Delta\mathrm{y}, \mathrm{z}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ или $\Delta_{\mathrm{z}}\mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} + \Delta\mathrm{z}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$)

Def 2 Частной производной первого порядка функции $\mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$

по одной из независимый переменный x (или y или z) называется предел частного приращения функции$\Delta_{\mathrm{x}}\mathrm{u}$ (или $\Delta_{\mathrm{y}}\mathrm{u}$ или $\Delta_{\mathrm{z}}\mathrm{u}$) по этой переменной к приращению переменной, когда приращение переменной стремится к 0.

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = \lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0} \frac{\Delta_{\mathrm{x}}\mathrm{u}}{\Delta\mathrm{x}} = \lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0} \frac{\mathrm{f}\big((\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) - \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})\big)}{\Delta\mathrm{x}}$$

Частную производную первого порядка функции $\mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$

по переменный x обозначают: $\frac{\partial u}{\partial x}$; u'_x ; $\frac{\partial f}{\partial x}$; $f'_x(x, y, z)$

Функция трех переменных $u = f(x, y, z)$ имеет три частные производные первого порядка,

по x

$$u'_x = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f\big((x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)\big)}{\Delta x}$$

по y

$$u'_y = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f\big((x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)\big)}{\Delta y}$$

по z

$$u'_z = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f\big((x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)\big)}{\Delta z}$$

Функция двух переменных $z = f(x,y)$ имеет две частные производные первого порядка,

$$z'_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$z'_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

13.2 Геометрический смысл частных производных для функций двух переменных.

Если через Р(x_0, y_0) проведем плоскостью $y = const$ (плоскость параллельную плоскости XOZ), то она пересечёт поверхность, соответствующую функции $z = f(x,y)$, по некоторой кривой $l_{y=const} = f(x, y = const)$. Производная $\frac{\partial z}{\partial x}$, найденная в точке Р$(x_0, y_0)$, будет равна тангенсу угла (α) наклона касательной, к кривой $l_{y=const}$ в точке Р(x_0, y_0), или угловому коэффициенту (k) касательной, т.е. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ =tg(α)=k. (Рис. 2)

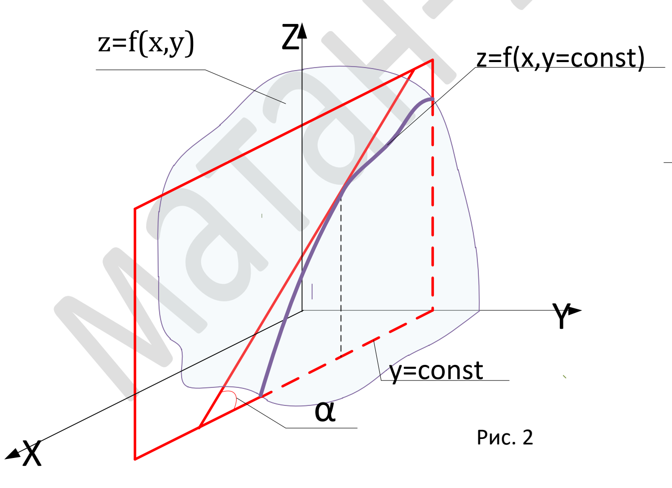

Рис. 2

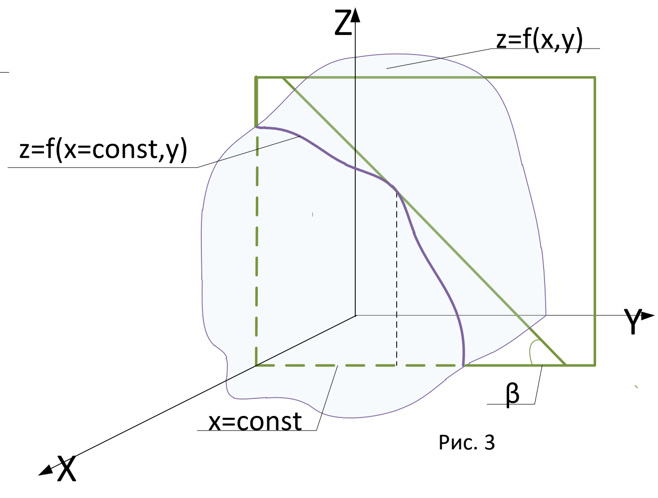

Рис. 3

Если через Р(x_0, y_0) построить плоскостью $x = const$ (плоскость параллельную плоскости YOZ), то она пересечёт поверхность, соответствующую функции z = f (x, y), по некоторой кривой $l_{x=const} = f(x = const, y)$. Производная $\frac{\partial z}{\partial y}$, найденная в точке $P(x_0, y_0)$, будет равна тангенсу угла (β) наклона касательной, к кривой $l_{x=const}$ в точке $P(x_0, y_0)$, или угловому коэффициенту (k) касательной, т.е. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ =tg(β)=k. (Рис. 3)

Предположим, что функция нескольких переменных имеет частные производные первого порядка во всех точках области определения D. Эти производные являются функциями нескольких переменных в области D и они тоже могут иметь частные производные первого порядка.

<u>Def 3</u> Частные производные первого порядка от частных производных первого порядка функции $u = f(x, y, z) = f(P)$ нескольких переменных называются *частными производными второго порядка функции нескольких переменных* и обозначаются

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Аналогично определяются частные производные более высокого порядка.

<u>Def 4</u> Частная производная высшего порядка, взятая по разным переменным, называется *смешанной производной* и обозначается $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (частная производная второго порядка) или $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = f'''_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ или $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = f'''_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$(частные производные третьего порядка)

Например, функция двух переменных $z = f(x, y)$ имеет четыре частные производные второго порядка

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; транскрипция «дэ два эф по дэ икс в квадрате»

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; транскрипция «дэ два эф по дэ икс по дэ игрек»

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$; транскрипция «дэ два эф по дэ игрек по дэ икс »

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; транскрипция «дэ два эф по дэ игрек в квадрате» а функция трех переменных $u = f(x,y,z)$ имеет уже девять частных производных второго порядка.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

В общем случае, смешанные производные не равны друг другу, например $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, поэтому порядок написания переменной в знаменателе частной производной имеет важное значение.

Имеет место теорема о равенстве смешанных производных.

Th 1. Если функция $\mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \mathrm{f}(\mathrm{P})$ определена и непрерывна в окрестности точки $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ вместе со своими частными производными до k-ого порядка включительно, то смешанные производные функции до k-ого порядка включительно в этой точке, не зависят от порядка дифференцирования.

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)$$

Например, если функция $z = f(x,y)$ непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в окрестности точки $P_0(x_0,y_0)$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$.

Для функции двух переменных $z = f(x,y)$ непрерывной вместе со своими частными производными до третьего порядка включительно в окрестности точки $P_0(x_0,y_0)$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(P_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(P_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(P_0) .$$

Пример 1.

а) Найти смешанные производные второго порядка функции

$z(x,y) = y \cdot \ln(5x+3) - x^4$ и проверить их равенство.

<u>Решение:</u> Функция является непрерывной по переменным x и y. Найдем вторые смешанные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(1 \cdot \ln(5x+3)) = \frac{1}{(5x+3)} \cdot 5$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y \cdot \frac{1}{(5x+3)} \cdot 5 - 4 \cdot x^3\right) = 1 \cdot \frac{1}{(5x+3)} \cdot 5$$

то есть производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

б) Найти смешанные производные второго порядка функции $z = x^y, x > 0, y > 0$ и проверить их равенство.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^y \cdot lnx) = y \cdot x^{y-1} \cdot lnx + x^y \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot x^{y-1}) = 1 \cdot x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot lnx$$

как видно производные равны $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

<u>**Def 5**</u>. *Полным приращением* функции $u = f(x,y,z)$ называется приращение $\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)$

(для функции двух переменных $z = f(x,y)$ *полным приращением* функции называется приращение $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$)

<u>**Def 6**</u> Функция $u = f(x,y,z) = f(P)$ называется дифференцируемой в точке, если её полное приращение Δu может быть представлено в виде суммы двух слагаемых: выражения, линейного относительно приращений $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и величины бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$

$$\Delta u = \underbrace{A(x,y,z)\Delta x + B(x,y,z)\Delta y + C(x,y,z)\Delta z}_{\text{линейное слагаемое}} + \underbrace{o(\rho)}_{\text{бесконечно малое слагаемое}}$$

где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ и $\lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0$

для функции двух переменных $z = f(x,y)$ полное приращение Δz может быть представлено в виде суммы двух слагаемых:

Th 2. Если функция $u = f(x,y,z)$ дифференцируема в точке $P(x_0, y_0, z_0)$, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство: По условию теоремы функция u= f(x, y, z) дифференцируема в точке

$$\text{т. е. } \Delta u = A(x,y,z)\Delta x + B(x,y,z)\Delta y + C(x,y,z)\Delta z + o(\rho)$$

$$\lim_{\rho\to 0} \Delta u = 0 \text{ , так как при } \rho \to 0 \ \ \Delta x, \Delta y, \Delta z \text{ и } o(\rho) \text{ стремятся к } 0$$

$$\text{так как } \lim_{\rho\to 0} \Delta u = 0 \text{ , то } \lim_{P\to P_0} \big(f(P) - f(P_0)\big) = 0$$

$$\text{и следовательно } \lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0) \text{ , что означает,}$$

что функция $u = f(x,y,z)$ непрерывна точке $P(x_0, y_0, z_0)$. ч.т.д.

Место для формулы.

Если функция $u = f(x,y,z) = f(P)$ дифференцируемая в точке, то она имеет в этой точке частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u_x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y = 0\\ \Delta z = 0}} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y = 0\\ \Delta z = 0}} \frac{A(x,y,z)\Delta x + o(\rho)}{\Delta x} = A(x,y,z)$$

$$\text{имеем } \frac{\partial u}{\partial x} = A(x,y,z)$$

аналогично, $\frac{\partial u}{\partial y} = B(x,y,z)$ и $\frac{\partial u}{\partial z} = C(x,y,z)$,

тогда полное приращение Δu может быть представлено в виде суммы двух слагаемых

$$\Delta u = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z)\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)\Delta z}_{\text{линейное слагаемое}} + \underbrace{o(\rho)}_{\substack{\text{бесконечно малое}\\ \text{слагаемое}}}$$

14.1 Дифференциал функции нескольких переменных

<u>Def 7</u> *Полным дифференциалом функции трех переменных* $u = f(x, y, z)$ называется линейная часть её полного приращения, относительно приращений всех её переменных $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и обозначается du

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращением $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$.

<u>Def 8</u> *Частными дифференциалами* по переменной x (или y, или z) называется линейная часть её полного приращения, линейная относительно приращения по переменной Δx(или Δy, или Δz)

$$du_x = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращением $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$.

Для функций двух переменных $z = f(x, y)$ полный дифференциал равен

<u>Def 9</u> Дифференциалом второго порядка от функции нескольких переменных называется полный дифференциал от ее полного дифференциала первого порядка $d^2u = d(du)$;

аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка

$$d^n u = d(d^{(n-1)}u).$$

Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными, то дифференциалы высших порядков определяются символически формулой, коэффициенты которой совпадают с коэффициентами формулы бинома Ньютона:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^n z$$

Для n=2 имеем дифференциал второго порядка для функция $z = f(x, y)$

$$\boldsymbol{d^2 z} \overset{\text{def}}{=} d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot dx^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot dxdy + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot dxdy + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot dy^2 =$$

$$= \boldsymbol{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot dy^2}$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot dy^2$$

Для n=3 имеем дифференциал третьего порядка для функция $z = f(x, y)$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \cdot dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} \cdot dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} \cdot dy^2 dx + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \cdot dy^3$$

14.1Производная сложной функции нескольких переменных

Def 10 Пусть функция $w = f(x, y, z)$ определена в окрестности точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Пусть её аргументы являются функциями от переменных (u, v), (т.е. $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$) и определены в некоторой окрестности точки $M_0(u_0, v_0)$, причем

$x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$, тогда в окрестности точки $M_0(u_0, v_0)$ определена *сложная функция*

$$w = f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) = F(u, v)$$

Замечание 1. Функция $w = f(P)$ может быть функцией от любого количества переменных.

Замечание2. Аргументы функции $w = f(P)$ могут быть функциями от любого количества переменных.

Например, пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ с аргументами, которые являются также функциями двух переменных (u, v)

(т. е. $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$), тогда имеем сложную функцию

$$z = f\big(x(u, v), y(u, v)\big) = z(u, v) = F(u, v),$$

или пусть функция трех переменных $w = f(x, y, z)$ с аргументами, которые являются также функциями от переменной t

(т. е. $x = x(t), y = y(t)$, $z = z(t)$), тогда имеем сложную функцию

$$w = f\big(x(t), y(t), z(t)\big) = F(t)$$

Th 3. Пусть функция $w = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, её аргументы являются функциями от переменных (u, v), (т.е. $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$) и дифференцируемы в точке $M_0(u_0, v_0)$, причем $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$, тогда сложная функция

$w = f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ от переменных (u, v) дифференцируема в точке

$M_0(u_0, v_0)$ и её частные производные первого порядка $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ определяются формулами

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$

<u>Пример 2</u>.

а) найдите первые частные производные по ρ и φ функции

$$w = f(x, y, z) = \frac{y}{5} e^{2z+x} + \ln(y + 2z) + 3x$$

при условии, что $x = \rho^2 cos\varphi$, $y = \rho sin\varphi$, $z = \rho + \varphi^2$

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \rho} =$$

$$= \left(\frac{y}{5}e^{2z+x} + 3\right) \cdot 2\rho cos\varphi + \left(\frac{1}{5}e^{2z+x} + \frac{1}{y+2z}\right) \cdot sin\varphi +$$

$$+ \left(\frac{y}{5}e^{2z+x} \cdot 2 + \frac{2}{y+2z}\right) \cdot 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} =$$

$$= \left(\frac{y}{5}e^{2z+x} + 3\right) \cdot (-\rho^2 sin\varphi) + \left(\frac{1}{5}e^{2z+x} + \frac{1}{y+2z}\right) \cdot \rho cos\varphi +$$

$$+ \left(\frac{y}{5}e^{2z+x} \cdot 2 + \frac{2}{y+2z}\right) \cdot 2\varphi$$

б) найдите первую производную по t функции $w = f(x, y, z)$ при условии, что $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

в) найдите первую производную по t функции $z = f(t, x, y)$ при условии, что $x = x(t)$, $y = y(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

На этом примере хорошо видно, что полная $\frac{dz}{dt}$ производная функции $z = f(t, x, y)$ по переменной t и частная $\frac{\partial z}{\partial t}$ производная этой же функции по той же переменной отличаются друг от друга.

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0, y_0)$, её аргументы являются функциями от переменных (u, v), (т.е. $x = x(u,v), y = y(u,v)$) и дифференцируемы в точке $M_0(u_0, v_0)$, причем $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, и по теореме 3 сложная функция

$z = f\big(x(u,v), y(u,v)\big) = z(u,v)$ от переменных (u,v) дифференцируема

в точке $M_0(u_0, v_0)$ и имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\ .$$

Найдем дифференциал сложной функции $z = f\big(x(u,v), y(u,v)\big) = z(u,v)$.

Полный дифференциал функции двух переменных $z = f(x,y)$ равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$$

Так как аргументы функции $z = f(x,y)$ являются также непрерывными функциями двух переменных (u,v) (т.е. $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$), то учитывая, что

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot dv \quad \text{и } dy = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot dv$$

дифференциал сложной функции $z = f\big(x(u,v), y(u,v)\big) = z(u,v)$ будет равен

$$\boldsymbol{dz} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot dv\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)\cdot du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)\cdot dv =$$

$$= \boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot dv}$$

Следовательно, полный дифференциал функции двух переменных выражается формулой формальная запись, которой в обоих случаях одинакова. Это означает, что *форма первого полного дифференциала инвариантна относительно замены переменных.*

14.2 Формула Тейлора для функции двух (трех) переменных

Пусть в окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до $(n+1)$ го порядка включительно, тогда для любой точки $P(x, y)$, принадлежащей окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$, справедлива формула Тейлора n–го порядка

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}\cdot(y-y_0)\right)^k f(x_0,y_0) + o(\rho^n) =$$

$$= f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2\right] + \cdots +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}\cdot(y-y_0)\right)^n f(x_0,y_0) + R_n(x_0,y_0)$$

где $R_n(x_0, y_0)$ остаточный член формулы Тейлора

анологично, функции одной переменной,

$R_n(x_0, y_0) = o(\rho^n)$ остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано

где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ и $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o(\rho^n)}{\rho^n} = 0$

или

остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа

$$R_n(x_0,y_0) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot(x-x_\xi) + \frac{\partial}{\partial y}\cdot(y-y_\xi)\right)^{n+1} f(x_\xi, y_\xi)$$

где $P_\xi(x_\xi, y_\xi)$ некоторая точка окрестности $P_0(x_0, y_0)$для которой

выполняются условия $x_\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ $y_\xi = y_0 + \theta(y - y)$ $0 < \theta < 1$.

Для функции $w = f(x, y, z)$ непрерывной в месте со своими частными производными до $(n+1)$ го порядка в окрестности точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$

формула Тейлора в точке $P(x,y,z)$ принадлежащей окрестности точки $P_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$f(P)=f(P_0\ )+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}\cdot(y-y_0)+\frac{\partial}{\partial z}\cdot(z-z_0)\right)^k f(P_0)+o(\rho^n)=$$

$$=f(P_0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\cdot(z-z_0)\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)\cdot(x-x_0)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)(y-y_0)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\ P_0)\cdot(z-z_0)^2+\right.$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0)+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(P_0)\cdot(x-x_0)(z-z_0)+$$

$$\left.+\,2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(P_0)\cdot(z-z_0)(y-y_0)\right]+$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}\cdot(y-y_0)+\frac{\partial}{\partial z}\cdot(z-z_0)\right)^n f(P_0)+o(\rho^n)$$

где $\quad \rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\quad$ и $\quad \lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho}=0$

с остаточный членом $R_n(x_0,y_0,z_0)$ формулы Тейлора в форме Пеано

Пример 3.

Разложить функцию $w=f(x,y,z)=x^2\cdot y+z\cdot lny-5$ в окрестности точки $P_0(x_0,y_0,z_0)=(0{,}1,-1)$ по формуле Тейлора до 2 порядка

$$f(P)=f(P_0\ )++\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\cdot(z-z_0)\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)\cdot(x-x_0)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)(y-y_0)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\ P_0)\cdot(z-z_0)^2+\right.$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P_0)\cdot(x-x_0)(y-y_0)+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(P_0)\cdot(x-x_0)(z-z_0)+$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(P_0)\cdot(z-z_0)(y-y_0)\Big]+o(\rho^2)$$

где $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ и $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}=0$

Ищем первые и вторые частные производные функции $w=f(x,y,z)=$

$=x^2\cdot y+z\cdot lny-5$

Первые частные производные

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,y,z)=2xy \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(P_0)=2\cdot 0\cdot 1=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,y,z)=x^2+\frac{z}{y} \qquad \frac{\partial w}{\partial y}(P_0)=0^2+\frac{-1}{1}=-1$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}(x,y,z)=lny \qquad \frac{\partial w}{\partial z}(P_0)=\ln(1)=0$$

Вторые частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=2y \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=2x \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}=2x \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{-z}{y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}=\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}=0 \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial y}=\frac{1}{y} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$$

Вторые частные производные в точке $P_0(x_0,y_0,z_0)=(0,1,-1)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(P_0)=2 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(P_0)=0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}(P_0)=0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}(P_0)=0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(P_0)=1 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}(P_0)=1$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}(P_0)=0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial y}(P_0)=1 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(P_0)=0$$

формула Тейлора 2–го порядка для функции $w=x^2\cdot y+z\cdot lny-5$

в окрестности точки $P_0(x_0,y_0,z_0)=(0,1,-1)$ имеет вид

$$\boldsymbol{f(x,y,z)} = f(P) = -5 + +\frac{1}{1!}\big(0\cdot(x-0) - 1\cdot(y-1) + 0\cdot(z+1)\big) +$$

$$+\frac{1}{2!}[2\cdot(x-0)^2 - 1\cdot(y-1)^2 + 0\cdot(z+1)^2 + 2\cdot 0\cdot(x-0)(y-1) +$$

$$+2\cdot 0\cdot(x-0)(z+1) + 2\cdot 1\cdot(z+1)(y-1)] + o(\rho^2) =$$

$$= -5 - 1\cdot(y-1) + \frac{1}{2!}[2\cdot(x-0)^2 - 1\cdot(y-1)^2 + 2\cdot(z+1)(y-1)] + o(\rho^2) =$$

$$\boldsymbol{= -5 - 1\cdot(y-1) + (x-0)^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + (z+1)(y-1) + o(\rho^2)}$$

<u>Ответ:</u> $f(x,y,z) = -5 - 1\cdot(y-1) + x^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + (z+1)(y-1) + o(\rho^2)$