Тема 12 Функции нескольких переменных.

12.1. Основные понятия.

Исследование функции нескольких переменных проведем на примерах функций двух и трех переменных, так как все данные определения и полученные результаты справедливы для функций n переменных.

Def1 Если в пространстве R_2 каждой точке P=$(x\ ,y)$, принадлежащей некоторому множеству D, ставится в соответствие единственное действительное значение z $\in R$, то говорят, что на множестве D задана функция двух переменных и обозначают $z = f(x,y)$.

Областью определения функции $z = f(x,y)$ является множество $D \subset R_2$. Графиком функции двух переменных $z = f(x,y)$ будет поверхность в R_3.

Например, графиком функции $z(x,y) = x^2 + y^2$, D: $x^2 + y^2 \leq 9$ будет эллиптический параболоид (рис.1)

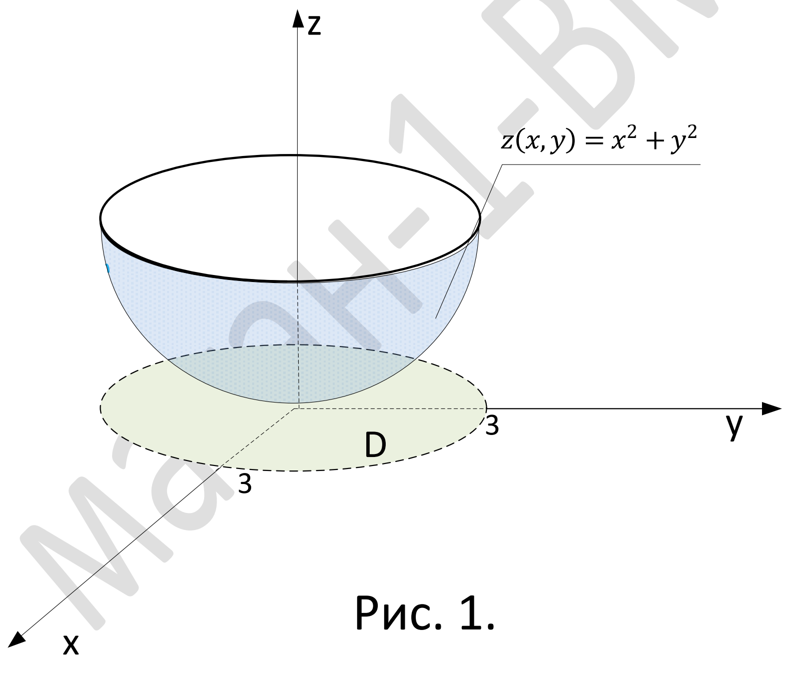

Рис. 1.

Def2 Функция трех переменных каждой точке $P = P(x,y,z) \subset R_3$, принадлежащей некоторому множеству D, ставит в соответствие единственное действительное значение u $\in R$, её обозначают

$$u = f(x, y, z)\ ,\ (x, y, z) \epsilon D \quad \text{или}\ u = f(P)\ , P \in D$$

Областью определения функции трех переменных u=f(x,y,z) является множество трехмерного пространства $D \subset R_3$. График функции лежит в четырёхмерном пространстве, представить его затруднительно.

В пространстве R_2 расстояние между двумя точками

$\mathrm{P} = (x\ , y)$ и $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ определяется следующим образом

$\rho(\mathrm{P},\ \mathrm{P}_0) = |\mathrm{P} -\ \mathrm{P}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

В пространстве R_3 расстояние между двумя точками

$\mathrm{P} = (x\ , y, z)$ и $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$определяет функция

$\rho(\mathrm{P},\ \mathrm{P}_0) = |\mathrm{P} -\ \mathrm{P}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

Def3 ε - окрестностью точки $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ трехмерного пространства R_3 называется множество точек $\mathrm{P} \in R_3$ таких, что $|\mathrm{P} -\ \mathrm{P}_0| < \varepsilon$ и обозначается $U(\ \mathrm{P}_0, \varepsilon)$.

Def4 Проколотой ε- окрестностью точки $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ трехмерного пространства R_3 называется множество точек $\mathrm{P} \in R_3$ таких, что $0 < |\mathrm{P} -\ \mathrm{P}_0| < \varepsilon$ и обозначается $\dot{U}(\ \mathrm{P}_0, \varepsilon)$.

Def5 Число А называется пределом функции $u = f(P)$ при стремлении точки Р к P_0, если для

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ :$ из условия $0 < |\mathrm{P} -\ \mathrm{P}_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(P) - A| < \varepsilon$

или $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ :$ из условия $\mathrm{P} \in \dot{U}(\ \mathrm{P}_0, \delta) \ \Rightarrow\ f(P) \in U(A, \varepsilon)$

Таким образом,понятие предела для функции многих переменных аналогично определению предела для функции одной переменной.

Отличие состоит в том,что если в R_1 (на прямой) мы можем стремиться к точке P_0 двумя способами, слева и справа, то в R_2 (на плоскости) и в R_3 (в пространстве) способов стремиться к точке a становится бесконечно много.

Для существования предела мы должны показать, что получаемый результат(предел) не зависит от способа подхода к предельной точке. Если при различных подходах к предельной точке получаем разные значения предела функции, то это является доказательством того, что предел функции не существует.

Иногда встречаются задачи, в которых необходимо вычислить предел функции двух(или трех) переменных только по одной заданной линии подхода к предельной точке. И если не существует общего предела, то предел по какому-нибудь частному направлению может существовать.

Рассмотрим функцию $z = f(x,y) = \frac{x \cdot y}{x^2+y^2}$ и попробуем найти предел при стремлении к началу координат, к точке $\text{P}_0 = (0{,}0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2} = |\text{по прямой } \ y = 5x| = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=5x}} \frac{x\cdot 5x}{x^2+(5x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{26x^2} = \frac{5}{26}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2} = |\text{по прямой } \ y = kx| = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2} = |\text{по параболе } \ y = x^2| = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \frac{x\cdot x^2}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2} = |\text{по кривой } y = sinx| = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=sinx}} \frac{x\cdot sinx}{x^2+(sinx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{sinx}{x}}{1+\left(\frac{sinx}{x}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

<u>Вывод:</u> предела данной функции при стремление к точке $\text{P}_0 = (0{,}0)$ не существует.

Такой же вывод можно получить, при переходе к полярным координатам, заменив стремления двух переменных $x \to 0$ и $y \to 0$ на стремление $r \to 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2} = |x = rcos\varphi, y = rsin\varphi| = \lim_{r\to 0} \frac{r^2 cos\varphi \cdot sin\varphi}{r^2} = cos\varphi \cdot sin\varphi$$

Предел завит от угла,т.е. от пути подхода к предельной точке $\text{P}_0 = (0{,}0)$.

Рассмотрим другую функцию $z = f(x,y) = \frac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2}$ и попробуем найти предел при стремлении к началу координат, к точке $\text{P}_0 = (0{,}0)$.

Перейдем к полярным координатам

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2} = \left|\begin{matrix} x = rcos\varphi \\ y = rsin\varphi \end{matrix}\right| = \lim_{r\to 0} \frac{r^2cos^2\varphi\cdot rsin\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{rcos^2\varphi\cdot sin\varphi}{1} = 0$$

Предел существует и не меняет значения при произвольном способе подхода к предельной точке $\mathrm{P}_0 = (0,0)$.

12.2 Непрерывность функций нескольких переменных.

Def6 Функция u= $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = f(P)$ называется непрерывной

в точке P_0 , если

1.функция u= $f(P)$ определена в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$,

2. существует конечный предела при $P\to P_0$,

$$\exists \lim_{P\to P_0} f(P)$$

3. предел существует и равен значению функции в точке P_0

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$$

Def7 Функция u= $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = f(P)$ называется непрерывной на области D, если она непрерывна в каждой точке области D.

Если не выполняется хотя бы одно условие из определения непрерывности функции в точке P_0, то такая точка называется точкой разрыва функции u=$f(P)$.

Например, если:

1.функция u= $f(P)$ не определена в точке P_0 ,

2. Не существует конечного предела при $P\to P_0$,

$$\nexists \lim_{P\to P_0} f(P)$$

3. предел существует, но не равен значению функции в точке P_0

$$\lim_{P\to P_0} f(P) \neq f(P_0)$$

Функция трех (двух)переменных может иметь множество точек разрыва, образующих например, одну, две линии разрыва или даже произвольное множество.

<u>Пример 1.</u>

а) функция $z(x,y) = \frac{5}{y+x}$ имеет линию разрыва $y = -x$

б) функция $z(x,y) = \frac{x+y}{x^2-y^2}$ имеет две линии разрыва, $y = -x$ и $y = x$

в) если функцию $z(x,y) = \frac{x+y}{x^2-y^2}$ доопределить следующим образом

$$z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2-y^2} & , \text{ при } y \neq -x \text{ и } y \neq x \\ \dfrac{1}{x-y} & , \text{ при } y = -x \end{cases},$$

то останется только одна линия разрыва $y = x$.

Таким образом, функции многих переменных предполагают огромное разнообразие различных задач

12.3. Дифференцирование функций нескольких переменных.

Def8 Частным приращением функции $\mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ по переменной (или y или z) называется приращение $\Delta_{\mathrm{x}}\mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) - \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$

$$(\Delta_{\mathrm{y}}\mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}+\Delta\mathrm{y},\mathrm{z}) - \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \text{ или } \Delta_{\mathrm{z}}\mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}+\Delta\mathrm{z}) - \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}))$$

Def9 Частной производной первого порядка функции $\mathrm{u} = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$

по одной из независимый переменный x (или y или z) называется предел частного приращения функции$\Delta_{\mathrm{x}}\mathrm{u}$ (или $\Delta_{\mathrm{y}}\mathrm{u}$ или $\Delta_{\mathrm{z}}\mathrm{u}$) по этой переменной к приращению переменной, когда приращение переменной стремится к 0.

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = \lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0}\frac{\Delta_{\mathrm{x}}\mathrm{u}}{\Delta\mathrm{x}} = \lim_{\Delta\mathrm{x}\to 0}\frac{\mathrm{f}\big((\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) - \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}\big)}{\Delta\mathrm{x}}$$

Частную производную первого порядка функции $u = f(x, y, z)$

по переменный x обозначают: $\frac{\partial u}{\partial x}$; u'_x ; $\frac{\partial f}{\partial x}$; $f'_x(x, y, z)$

Функция трех переменных $u = f(x, y, z)$ имеет три частные производные первого порядка,

по x

$$u'_x = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big((x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)\big)}{\Delta x}$$

по y

$$u'_y = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\big((x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)\big)}{\Delta y}$$

по z

$$u'_z = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f\big((x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)\big)}{\Delta z}$$

Функция двух переменных $z = f(x, y)$ имеет две частные производные первого порядка,

$$z'_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$z'_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Def10 Приращение $\Delta_x z = \Delta_x f = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ называется частным приращением данной функции по переменной x. Приращение

$\Delta_y z = \Delta_y f = f(x, y+\Delta x) - f(x,y)$ называется частным приращением данной функции по переменной y.

Вывод:Из определения частной производной первого порядка функции

$u = f(P)$ видно, что при дифференцировании функции нескольких переменных по одной из них, все остальные переменные следует считать постоянными и, следовательно, можно пользоваться известными правилами и формулами дифференцирования функции одной переменной.

<u>Пример 2.</u>

а) Найти все частные производные первого порядка функции двух переменных

$z(x, y) = 5x^8 \cdot \sqrt[5]{y} - 7e^{2x+5y}$

<u>Решение:</u> При вычислении частной производной по переменной x переменную y считаем константой

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (5x^8 \cdot \sqrt[5]{y})'_x - (7e^{2x+5y})'_x = 5 \cdot 8x^7 \cdot \sqrt[5]{y} - 7 \cdot e^{2x+5y} \cdot 2$$

при вычислении частной производной по переменной y переменную x считаем константой

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (5x^8 \cdot \sqrt[5]{y})'_y - (7e^{2x+5y})'_y = 5 \cdot x^8 \cdot \frac{1}{5} y^{\frac{1}{5}-1} - 7 \cdot e^{2x+5y} \cdot 5$$

б) Вычислить все частные производные первого порядка функции трех переменных

$$u(x, y, z) = 4 \cdot \ln(3xy - z^2) + x \cdot tg(y^3 - 2xz)$$

<u>Решение:</u> Аналогично предыдущему примеру из пункта а), при вычислении частной производной по переменной x, переменные y и z считаем константами.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4 \cdot \frac{1}{3xy - z^2} \cdot 3y + 1 \cdot tg(y^3 - 2xz) + x \cdot \frac{1}{Cos^2(y^3 - 2xz)} \cdot (-2z)$$

Частная производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ вычисляется при фиксированных x и z , т.е. $x = const$ и $z = const$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4 \cdot \frac{1}{3xy - z^2} \cdot 3x + x \cdot \frac{1}{Cos^2(y^3 - 2xz)} \cdot (3y^2)$$

Частная производная $\frac{\partial u}{\partial z}$ берется при фиксированных x и y, т.е. $x = const$ и $y = const$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 4 \cdot \frac{1}{3xy - z^2} \cdot (-2z) + x \cdot \frac{1}{Cos^2(y^3 - 2xz)} \cdot (-2x)$$