Тема 11 Общая схема построения графика функции

1.1 Асимптоты.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$

Def1 Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется такая прямая, для которой расстояние между точками этой прямой и кривой графика функции стремится к нулю, когда точка по кривой графика неограниченно стремится в бесконечность.

Различают наклонные асимптоты и вертикальные асимптоты

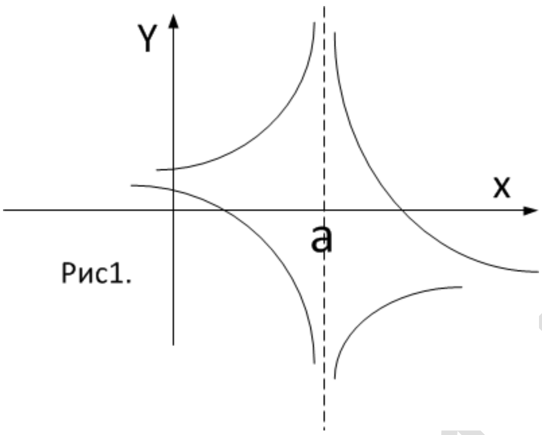

Рис1.

Def2 Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

или $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

Def3 Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

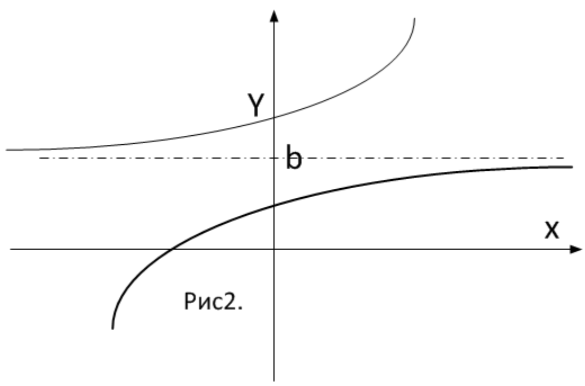

Рис2.

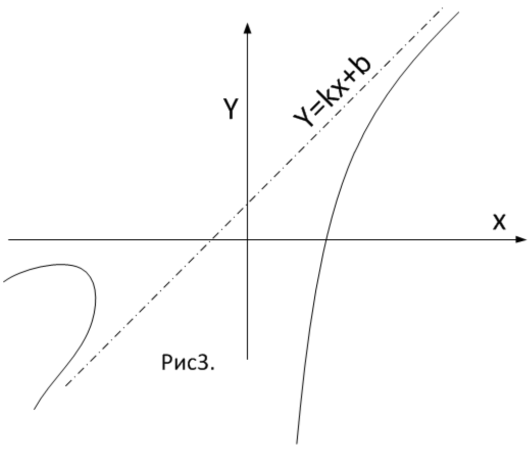

Рис3.

Def4 Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

Th1.(о существовании наклонной асимптоты графика функции*)*

Для того, чтобы прямая $y=kx+b$ являлась наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$ необходимо и достаточно (<=>) существование конечных пределов

$$\exists\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \qquad \text{и} \qquad \exists\ \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$$

Доказательство: необходимость (=>) Дано: у графика функции $y=f(x)$ существует наклонная асимптота $y=kx+b$, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0 \quad =>$$

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(kx+b)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)-k-0=0 \quad =>$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=k$$

$$2.\ \lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]-b=0 \quad =>$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$$

Достаточность (<=) Дано:

$$\exists\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \qquad \text{и} \qquad \exists\ \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b\,, \qquad \text{тогда}$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]-b=b-b=0$$

ч.т.д.

Пример 1. Найти асимптоты графика функции $y=\frac{x^2}{x\quad -4}$

1.найдем вертикальные асимптоты

$$x \quad -4=0 \quad => \quad x=4 \ - \text{вертикальная асимптота.}$$

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2}{x \quad -4}=+\infty \qquad \text{и} \quad \lim_{x\to 4^-}\frac{x^2}{x \quad -4}=-\infty$$

2.найдем наклонные и горизонтальные (k=0) асимптоты

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x \quad -4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x \quad -4)}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x \quad -4}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2-x^2+4x}{x \quad -4}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x}{x \quad -4}\right]=4 \quad =>$$

$$y=x+4 \ \text{ наклонная асимптота}$$

11.2 Общая схема построения графика функции

Построение графика функции происходит в 3 этапа

1 этап. Определение общего характера графика функции

1.1 Найти область определения функции

1.2 Вычислить предельные значения на границе области определения

1.3 Исследовать функцию на четность

1.4 Исследовать функцию на периодичность

1.5 Найти точки пересечения с координатными осями

1.6 Найти точки разрыва.

1.7 Найти асимптоты (вертикальные, наклонные, горизонтальные) графика функции.

1.8 По полученным результатам начертить эскиз графика

2 этап. Уточнение графика по первой производной.

2.1. Вычислить первую производную

2.2 Найти интервалы монотонности функции

2.3Найти точки экстремума функции.

3этап.Уточнение графика по второй производной

3.1 Вычислить вторую производную

3.2 Найти интервалы выпуклости, вогнутости функции

3.3 Найти точки перегиба функции

3.4. Составить таблицу, объединяющую все полученные результаты и построить график функции.

Пример 2. Исследовать функцию $y = \frac{x^4}{x^3-2}$ и построить график

.1 этап Определение общего характера графика

1.1.Область определения

$$x^3 - 2 \neq 0 \quad => \quad x \neq \sqrt[3]{2} - \text{область определения функции}$$

1.2 Поведение на границе области определения

$$x = \sqrt[3]{2} - \text{точка разрыва второго рода, так как}$$

$$\lim_{x\to\sqrt[3]{2}^+} \frac{x^4}{x^3-2} = +\infty \qquad \text{и} \quad \lim_{x\to\sqrt[3]{2}^-} \frac{x^4}{x^3-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$$

1.3,1.4 Функция не является ни четной ни нечетной и не является периодической.

1.5 Пересечение с осями координат

при $x = 0 \quad y = 0$

при $x < \sqrt[3]{2} \quad y < 0$

при $x > \sqrt[3]{2} \quad y > 0$

1.6 $x = \sqrt[3]{2}$ – точка разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to \sqrt[3]{2}^+} \frac{x^4}{x^3-2} = +\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to \sqrt[3]{2}^-} \frac{x^4}{x^3-2} = -\infty$$

1.7 Найдем асимптоты

1).найдем вертикальные асимптоты

$$x^3 - 2 = 0 \quad => \quad x = \sqrt[3]{2} \quad \text{– вертикальная асимптота.}$$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x^4}{x^3-2} = +\infty \qquad \text{и} \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{x^4}{x^3-2} = -\infty$$

2).найдем наклонные и горизонтальные (k=0) асимптоты

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4}{x^3-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{x(x^3-2)} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^4}{x^3-2} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^4 - x^4 + 2x}{x^3-2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{x^3-2}\right] = 0 \quad =>$$

$$y = x \text{ наклонная асимптота}$$

2.этап Исследуем функцию по первой производной.

2.1 Вычислим первую производную

$$y' = \frac{4x^3\cdot(x^3-2) - 3x^2\cdot x^4}{(x^3-2)^2} = \frac{x^6 - 8x^3}{(x^3-2)^2} = \frac{x^3\cdot(x^3-8)}{(x^3-2)^2}$$

$$y' = 0 \text{ при } x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$

$$y' = \infty \text{ при } x_3 = \sqrt[3]{2}$$

2.2 -2.3 Найдем точки экстремума и определим интервалы монотонности рис.4

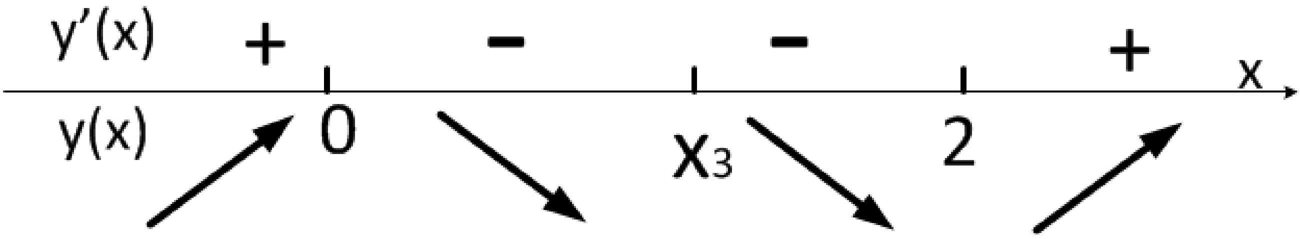

РИС 4.

$$\text{в точке } x_3 = \sqrt[3]{2} \text{ производная функции не меняет знак}$$

$$x_1 = 0 \ - \text{максимум функции и } y(0) = 0$$

$$x_2 = 2 \ - \text{минимум функции и } y(2) = \frac{8}{3}$$

3 этап. Проведем исследование функции по второй производной.

3.1 Вычислим вторую производную

$$y'' = \left(\frac{x^6 - 8x^3}{(x^3 - 2)^2}\right)' = \frac{(6x^5 - 24x^2)\cdot(x^3 - 2)^2 - 2(x^3 - 2)\cdot 3x^2\cdot(x^6 - 8x^3)}{(x^3 - 2)^4} =$$

$$= \frac{12x^5 + 48x^2}{(x^3 - 2)^3} = \frac{12x^2\cdot(x^3 + 4)}{(x^3 - 2)^3}$$

3.2 ,3.3 Найдем интервалы выпуклости, вогнутости функции и точки перегиба функции.

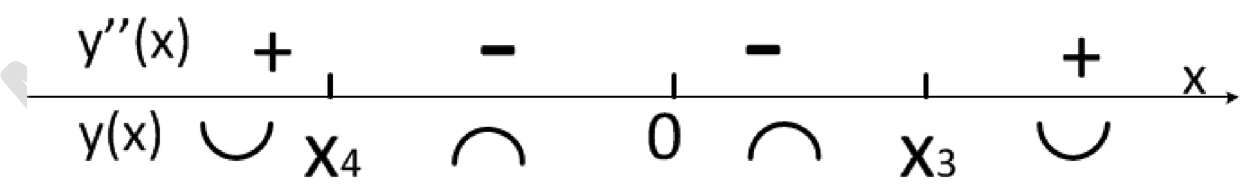

РИС 5.

$$y'' = 0 \text{ при } x_1 = 0 \qquad x_4 = -\sqrt[3]{4}$$

$$y'' = \infty \text{ при } x_3 = \sqrt[3]{2}$$

$$x_4 = -\sqrt[3]{4} - \text{точка перегиба и } y(-\sqrt[3]{4}) = -1$$

3.4. Составим таблицу, объединяющую все полученные результаты, и построим график функции.

$x \in$	$(-\infty;\ -\sqrt[3]{4})$	$-\sqrt[3]{4}$	$(-\sqrt[3]{4}; 0)$	0	$(0; \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y	$-$	-1	$-$	0	$-$	$\pm\infty$	$+$	$\frac{8}{3}$	$+$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	0	$-$	∞	$+$	$+$	$+$
		точка пере-гиба		max		верти-кальная асимп-тота		min	

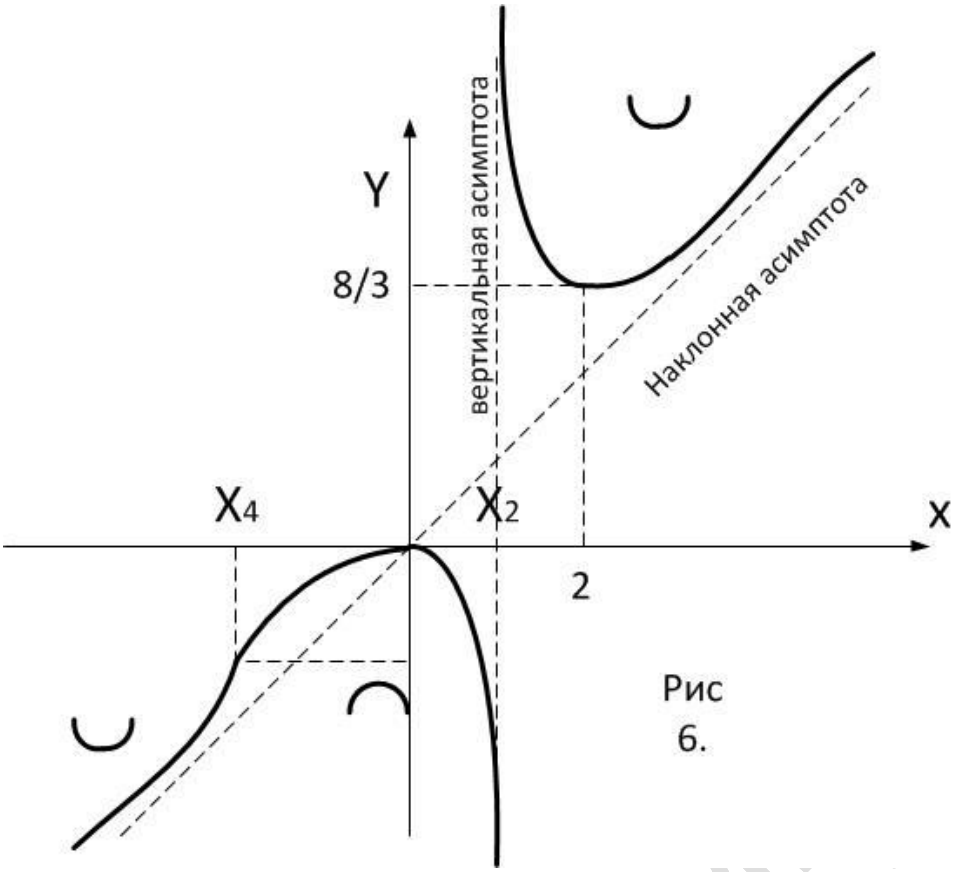

Рис
6.