**Общая схема построения графика функции**

*Асимптоты.*

Рассмотримфункция $y=f(x)$

**Определение 1.** Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется такая прямая, расстояние между точками этой прямой и кривой графика функции стремится к нулю, когда точка по кривой графика неограниченно стремится в бесконечность.

**Определение 2.**Прямая $x=a $называется вертикальной асимптотой графика функции $y=f\left(x\right),$ если

$$\lim\_{x\to a}f\left(x\right)=\infty $$

$$ или \lim\_{x\to a^{+}}f\left(x\right)=\pm \infty или \lim\_{x\to a^{-}}f\left(x\right)=\pm \infty $$



**Определение 3.**Прямая $y=b $называется горизонтальной асимптотой графика функции $y=f\left(x\right),$ если

$$\lim\_{x\to \infty }f\left(x\right)=b$$

$$ или \lim\_{x\to -\infty }f\left(x\right)=b или \lim\_{x\to +\infty }f\left(x\right)=b$$

**

**Определение 4.** Прямая $y=kx+b $называется наклонной асимптотой графика функции $y=f\left(x\right),$ если

$$\lim\_{x\to \infty }\left[f\left(x\right)-\left(kx+b\right)\right]=0$$

***Теорема 1.****(о существовании наклонной асимптоты графика функции)*

Для того, чтобы прямая $y=kx+b $ являлась наклонной асимптотой графика функции $y=f\left(x\right)$необходимо и достаточно $\left(<=>\right)$ существование конечных пределов

$$ ∃ \lim\_{x\to \infty }\frac{f\left(x\right)}{x}=k и ∃ \lim\_{x\to \infty }\left[f\left(x\right)-kx\right]=b $$

*Доказательство:* необходимо$\left(=>\right)$если у графика функции $y=f\left(x\right)$ существует наклонная асимптота $y=kx+b $ , т.е.

$$\lim\_{x\to \infty }\left[f\left(x\right)-\left(kx+b\right)\right]=0 => $$

$$1. \lim\_{x\to \infty }\frac{f\left(x\right)-\left(kx+b\right)}{x}=\lim\_{x\to \infty }\left(\frac{f\left(x\right)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=\lim\_{x\to \infty }\left(\frac{f\left(x\right)}{x}\right)-k-0=0 =>$$

$$\lim\_{x\to \infty }\left(\frac{f\left(x\right)}{x}\right)=k$$

$$2. \lim\_{x\to \infty }\left[f\left(x\right)-\left(kx+b\right)\right]=\lim\_{x\to \infty }\left[f\left(x\right)-kx-b\right]=\lim\_{x\to \infty }\left[f\left(x\right)-kx\right]-b=0 =>$$

$$\lim\_{x\to \infty }\left[f\left(x\right)-kx\right]=b$$

Достаточно $\left(<=\right)$ если

$$∃ \lim\_{x\to \infty }\frac{f\left(x\right)}{x}=k и ∃ \lim\_{x\to \infty }\left[f\left(x\right)-kx\right]=b , то $$

$$\lim\_{x\to \infty }\left[f\left(x\right)-\left(kx+b\right)\right]=\lim\_{x\to \infty }\left[f\left(x\right)-kx-b\right]=\lim\_{x\to \infty }\left[f\left(x\right)-kx\right]-b=b-b=0 ∎$$

*Пример 1.* Найти асимптоты графика функции $y=\frac{x^{4}}{x^{3}-2}$ $ $

1.ищем вертикальные асимптоты

$$x^{3}-2=0 => x=\sqrt[3]{2} -вертикальная асимптота.$$

$$\lim\_{x\to \sqrt[3]{2}^{+}}\frac{x^{4}}{x^{3}-2}=+\infty и \lim\_{x\to \sqrt[3]{2}^{-}}\frac{x^{4}}{x^{3}-2}=-\infty $$

2.ищем наклонные и горизонтальные(k=0) асимптоты

$$k= \lim\_{x\to \infty }\frac{f\left(x\right)}{x}= \lim\_{x\to \infty }\frac{\frac{x^{4}}{x^{3}-2}}{x}= \lim\_{x\to \infty }\frac{x^{4}}{x\left(x^{3}-2\right)}=1$$

$$b=\lim\_{x\to \infty }\left[f\left(x\right)-kx\right]= \lim\_{x\to \infty }\left[\frac{x^{4}}{x^{3}-2}-1∙x\right] =\lim\_{x\to \infty }\left[\frac{x^{4}-x^{4}+2x}{x^{3}-2}\right]=$$

$$=\lim\_{x\to \infty }\left[\frac{2x}{x^{3}-2}\right]=0 =>$$

$$ y=x наклонная асимптота $$

*Общая схема построения графика функции*

При построении графика функции удобно придерживаться следующей схемы:

1.Найти область определения функции, проверить её на четность и периодичность. Найти точки пересечения с координатными осями, интервалы знакопостоянства. Найти точки разрыва.

2.Найти асимптоты ( вертикальные, наклонные, горизонтальные) графика функции. Найти односторонние пределы в точках разрыва функции и на границах области существования( определения)

3. Провести исследование функции по первой производной. (Вычислить первую производную, найти интервалы монотонности функции и точки экстремума функции.)

4. Провести исследование функции по второй производной. (Вычислить вторую производную, найти интервалы выпуклости, вогнутости функции и точки перегиба функции.)

5. Составить таблицу, объединяющую все полученные результаты и построить график функции.

*Пример 2.* Исследовать функцию $y=\frac{x^{4}}{x^{3}-2}$ $ $ и построить схематический график.

1.Найти область определения функции, проверить её на четность и периодичность. Найти точки пересечения с координатными осями, интервалы знакопостоянства. Найти точки разрыва.

$$x^{3}-2\ne 0 => x\ne \sqrt[3]{2}-область определения функции$$

Функция не является четной и не является периодической.

$$при x=0 y=0 $$

$$ при x<\sqrt[3]{2} y<0 $$

$$при x>\sqrt[3]{2} y>0 $$

$$x=\sqrt[3]{2}-точка разрыва второго рода, так как$$

$$\lim\_{x\to \sqrt[3]{2}^{+}}\frac{x^{4}}{x^{3}-2}=+\infty и \lim\_{x\to \sqrt[3]{2}^{-}}\frac{x^{4}}{x^{3}-2}=-\infty $$

2.Найти асимптоты ( вертикальные, наклонные, горизонтальные) графика функции. Найти односторонние пределы в точках разрыва функции и на границах области существования( определения) Найдены в примере 1

$$x=\sqrt[3]{2} -вертикальная асимптота.$$

$$ y=x наклонная асимптота $$

3. Провести исследование функции по первой производной. (Вычислить первую производную, найти интервалы монотонности функции и точки экстремума функции.)

$$y^{'}=\frac{4x^{3}∙\left(x^{3}-2\right)-3x^{2}∙x^{4}}{\left(x^{3}-2\right)^{2}}=\frac{x^{6}-8x^{3}}{\left(x^{3}-2\right)^{2}}=\frac{x^{3}∙\left(x^{3}-8\right)}{\left(x^{3}-2\right)^{2}} $$

$$ y^{'}=0 при x\_{1 }=0 x\_{2 }=2 $$

$$ y^{'}=\infty при x\_{3 }=\sqrt[3]{2} $$

**

$$в точке x\_{3 }=\sqrt[3]{2} производная функции не меняет знак $$

$$x\_{1 }=0 -максимум функции и y\left(0\right)=0 $$

$$ x\_{2 }=2 -минимум функции и y\left(2\right)=\frac{8}{3} $$

4. Провести исследование функции по второй производной. (Вычислить вторую производную, найти интервалы выпуклости, вогнутости функции и точки перегиба функции.)

$$y^{''}=\left(\frac{x^{6}-8x^{3}}{\left(x^{3}-2\right)^{2}}\right)^{'}=\frac{\left(6x^{5}-24x^{2}\right)∙\left(x^{3}-2\right)^{2}-2\left(x^{3}-2\right)∙3x^{2}∙\left(x^{6}-8x^{3}\right)}{\left(x^{3}-2\right)^{4}}=$$

$$=\frac{12x^{5}+48x^{2}}{\left(x^{3}-2\right)^{3}}=\frac{12x^{2}∙\left(x^{3}+4\right)}{\left(x^{3}-2\right)^{3}}$$



$$y^{''}=0 при x\_{1 }=0 x\_{4 }=-\sqrt[3]{4} $$

$$ y^{''}=\infty при x\_{3 }=\sqrt[3]{2}$$

$$x\_{4 }=-\sqrt[3]{4}-точка перегиба и y\left(-\sqrt[3]{4}\right)=-1 $$

5. Составить таблицу, объединяющую все полученные результаты и построить график функции.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\in $$ | $$\left(-\infty ; -\sqrt[3]{4}\right)$$ | $$-\sqrt[3]{4}$$ | $$\left(-\sqrt[3]{4};0\right) $$ | $$0$$ | $$\left(0;\sqrt[3]{2}\right)$$ | $$\sqrt[3]{2} $$ | $$\left(\sqrt[3]{2};2 \right) $$ | $$2$$ | $$\left(2;+\infty \right)$$ |
| $$y$$ | $$-$$ | $$-1 $$ | $$-$$ | $$0$$ | $$-$$ | $$\pm \infty $$ | $$+$$ | $$\frac{8}{3}$$ | $$+$$ |
| $$y^{'}$$ | $$+$$ | $$+$$ | $$+$$ | $$0$$ | $$-$$ | $$0$$ | $$-$$ | $$0$$ | $$+$$ |
| $$y^{''}$$ | $$+$$ | $$0$$ | $$-$$ | $$0$$ | $$-$$ | $$\infty $$ | $$+$$ | $$+$$ | $$+$$ |
|  |  | точка пере-гиба  |  | max |  | верти-кальная асимп-тота |  | min |  |

строим график функции

