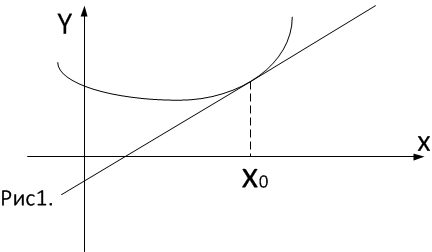
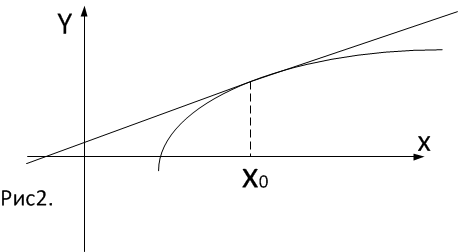
**Исследование функции по второй производной**

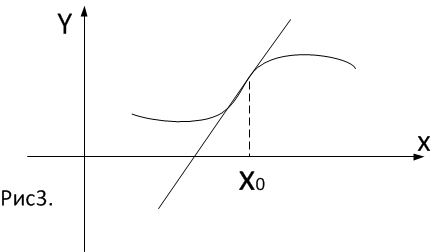
*Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.*

Рассмотримфункция определенную, непрерывную и имеющую непрерывные производные первого и второго порядка в окрестности точки . На графике функции возьмем точку и проведем касательную к кривой в этой точке .

**Определение 1.**

Если в дельта окрестности точки дуга кривой графика функции находится **над** касательной, то кривая в точке вогнута.

Если в дельта окрестности точки дуга кривой графика функции находится **под** касательной, то кривая в точке выпукла.



Если в дельта окрестности точки дуга кривой графика функции пересекает касательную, то точка в **точка перегиба**.

Кроме этого, введем в рассмотрение понятие о выпуклости и вогнутости функции на интервале . Пусть функция определена на интервале

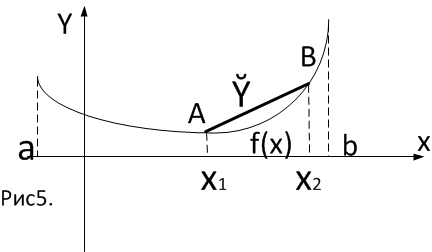
Возьмём точки и через графика функции с абсциссами проведем хорду AB, ординаты которой обозначим через , очевидно, .

**Определение 2.**



Если , то функция на интервале выпукла

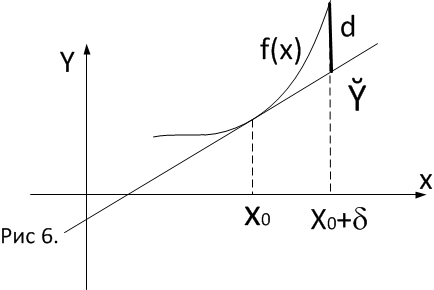
( выпукла вверх).

**

Если , то функция на интервале вогнута

( выпукла вниз).

Вернемся к рассмотрению функции определенной, непрерывной и имеющей непрерывные производные первого и второго порядка в окрестности точки . Геометрически ясно, что вопрос выпуклости, вогнутости или точке перегиба зависит от знака разности между ординатами кривой и касательной к графику функции в точке , т.е. от

Если в дельта окрестности точки

то функция в точке вогнута,

если в дельта окрестности точки

то функция в точке выпукла,

если в окрестности точки меняет знак при переходе через точку , то это точка перегиба.

***Теорема 1.****(достаточное условие выпуклости и вогнутости функции)*Если функция определена, непрерывна и дважды дифференцируема на интервале и

1. функция на интервале вогнута

2. функция на интервале выпукла.

*Доказательство:* Возьмём для и проведем в этой точке касательную к графику функции

Кроме того, в окрестности точки функция представима по формуле Тейлора (с остаточным членом в форме Лагранжа) в виде

где

тогда разность между ординатами кривой и касательной к графику функции в точке будет равна

Знак совпадает со знаком . Для значений , близких к , в силу непрерывности функция имеет тот же знак, что и .

Если то и и функция в точке вогнута, в силу произвольности точки и на интервале .

Если то и и функция в точке выпукла, в силу произвольности точки и на интервале

***Теорема 2.****(необходимое условие точки перегиба)*

Если функция непрерывная с непрерывной производной до второго порядка включительно, имеет в точке точку перегиба, то

*Доказательство: следует из теоремы 1.*

***Теорема 3.****(достаточное условие точки перегиба)*

Если функция непрерывная с непрерывной производной до второго порядка включительно, и вторая производная функции при переходе через точку меняет знак , то точка точка перегиба.

*Доказательство: следует из теоремы 1.*

*Пример 1.* Исследовать функцию и построить схематический график.

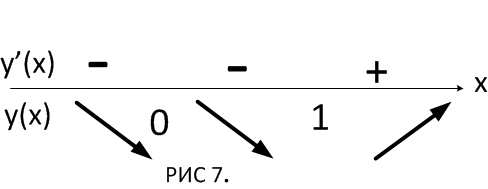
**1 шаг:** находим производную функции

находим стационарные точки функции

точек, в которых точек, в которых производная не существует, тоже нет.

таким образом, все критические точки нашей функции

**2 шаг+3 шаг:** отмечаем на оси все критические точки функции и составляем схему изменения знака производной функции в интервалах между критическими точками функции + на основании схемы делаем вывод о интервалах убывания или возрастания функции.



**4 шаг:** на основании схемы делаем вывод о характере критических точек.

**5 шаг:** находим вторую производную функции и точки, к которых вторая производная функции или отмечаем на оси все точки функции, в которых или и составляем схему изменения знака второй производной функции в интервалах между отмеченными точками, на основании схемы делаем вывод о интервалах вогнутости или выпуклости функции.

находим производную функции

находим точки, в которых вторая производная функции

точек, в которых

Вторая производная функции меняет знак при переходе через точки ,

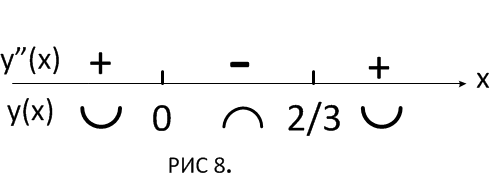
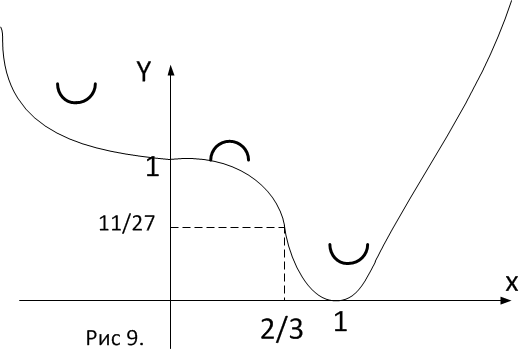


График функции имеет вид:



***Исследование стационарных точек***

***с помощью производных высших порядков***

***Теорема 4 (достаточное условие экстремума)***

Если функция в стационарной точке x0 имеет конечную производную второго порядка и

если , то точка x0 – точка максимума функции ,

если , точка x0 – точка минимума функции

***Теорема 5 (II достаточное условие точки перегиба)***

Если функция имеет в точке x0

, , то x0 – точка перегиба функции .

***Теорема 6 (III достаточное условие экстремума)***

Если число нечетно и функция имеет производные до го порядка включительно в окрестности точки и производную го порядка в точке и , то

если , то точка x0 – точка максимума функции ,

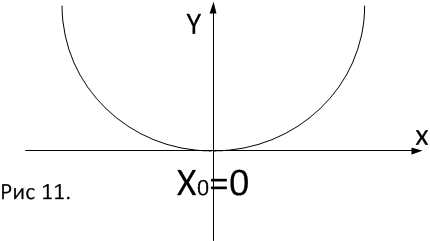
если , точка x0 – точка минимума функции

***Теорема 7 (III достаточное условие точки перегиба)***

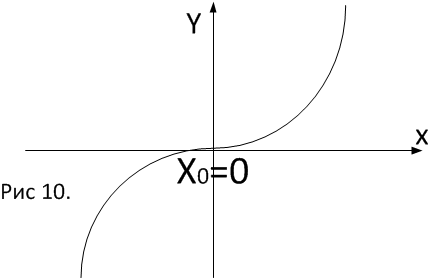
Если число четно и функция имеет производные до го порядка включительно в окрестности точки и производную го порядка в точке и , то

x0 – точка перегиба графика функции .

*Пример 2.* Исследовать функцию и построить схематический график.

Если четно, то в точке имеем

x0 – точка перегиба графика функции

Если число нечетно,

то в точке имеем

,

то точка x0 – точка минимума функции