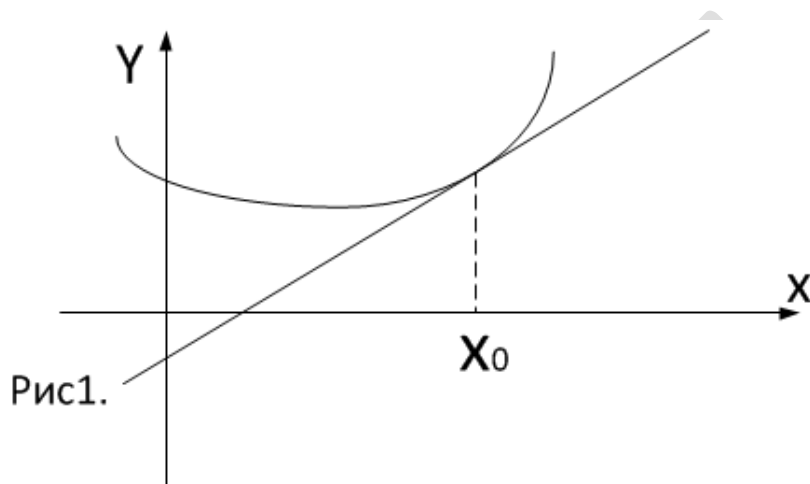


Тема 10 Исследование функции по второй производной

10.1 Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.

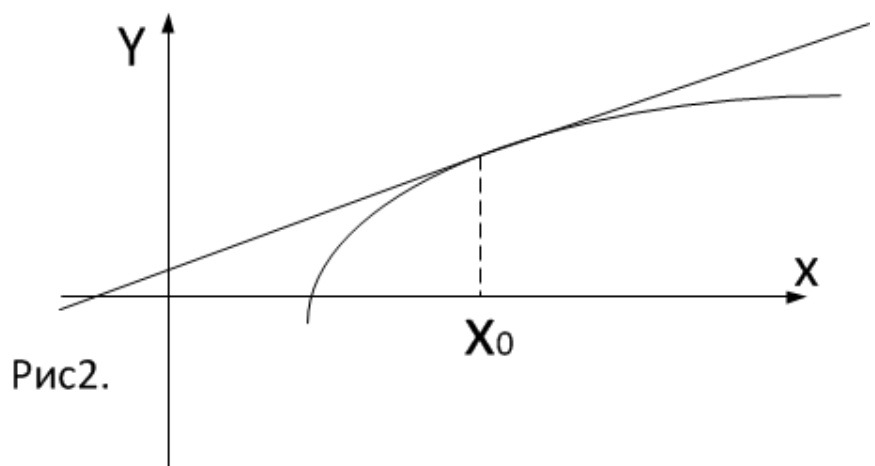
Рассмотрим функцию $y = f(x)$ определенную, непрерывную и имеющую непрерывные производные первого и второго порядка в окрестности точки x_0 . На графике функции возьмем точку $M_0(x_0, y_0)$ и проведем касательную к кривой в этой точке.

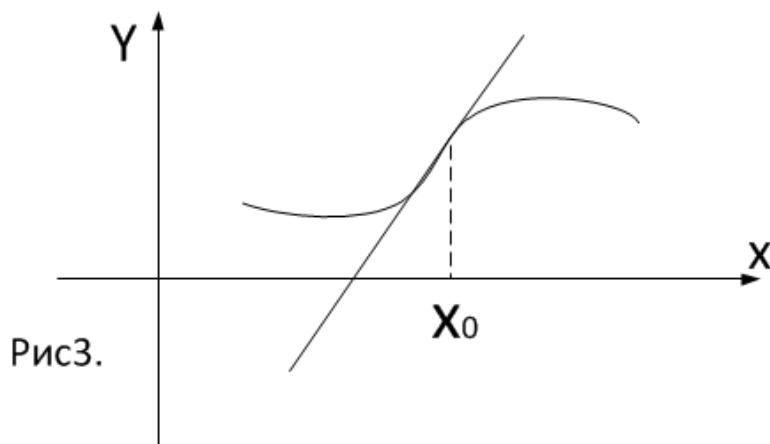
Def 1.



Если в дельта окрестности точки x_0 дуга кривой графика функции находится **над** касательной, то кривая в точке x_0 вогнута.

Если в дельта окрестности точки x_0 дуга кривой графика функции находится **под** касательной, то кривая в точке x_0 выпукла.





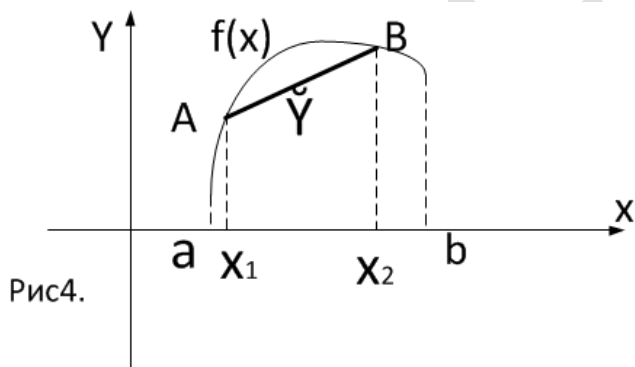
Если в дельта окрестности точки x_0 дуга кривой графика функции пересекает касательную, то точка x_0 — в **точка перегиба**.

Рис.3.

Введем понятие о *выпуклости* и *вогнутости* функции на интервале (a, b) . Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) .

Возьмём точки x_1 и $x_2 \in (a, b)$, так что $a < x_1 < x_2 < b$ и через точки графика функции с абсциссами x_1 и x_2 проведем хорду АВ, ординаты которой обозначим через $\check{y}$ $\check{y}(x_1) = f(x_1)$ и $\check{y}(x_2) = f(x_2)$.

Def 2.



Если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ и $\forall x \in (x_1, x_2)$ $f(x) > \check{y}(x)$, то функция $y = f(x)$ на интервале (a, b) выпукла (выпукла вверх).

Рис.4.

Если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ и $\forall x \in (x_1, x_2)$ $f(x) < \check{y}(x)$, то функция $y = f(x)$ на интервале (a, b) вогнута (выпукла вниз).

Рассмотрим функции $y = f(x)$. Она определена, непрерывна и имеет непрерывные производные первого и второго порядка в окрестности точки

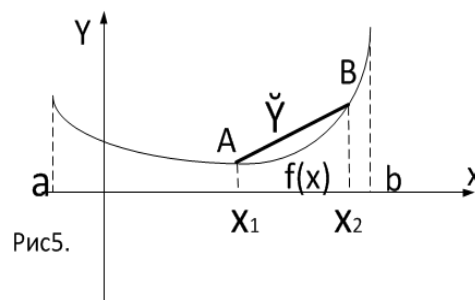


Рис.5.

x_0 . Из рисунков видно, что вопрос выпуклости, вогнутости или точки перегиба зависит от знака разности между ординатами кривой и касательной к графику функции в точке x_0 , т.е. от $d = f(x) - \check{y}(x)$.

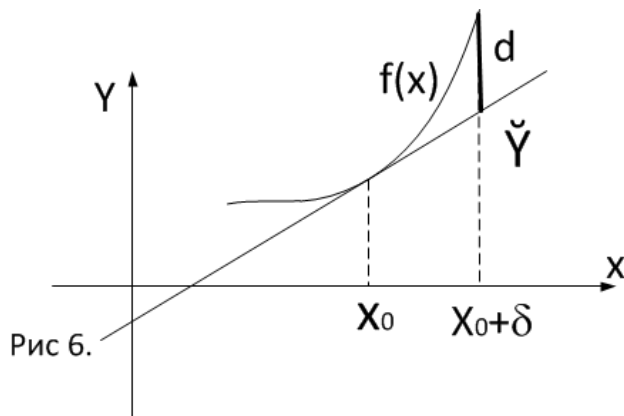


Рис 6.

Если в дельта окрестности точки x_0

$$d = f(x) - \check{y}(x) > 0,$$

то функция $y = f(x)$ в точке x_0 вогнута,

если в дельта окрестности точки x_0

$d < 0$, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 выпукла,

если в окрестности точки x_0 d меняет знак при переходе через точку x_0 , то это точка перегиба.

Th1. (достаточное условие выпуклости и вогнутости функции)

Если функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и дважды дифференцируема на интервале (a, b) и

1. $f''(x) > 0$, то функция на интервале (a, b) вогнута
2. $f''(x) < 0$, то функция на интервале (a, b) выпукла.

Доказательство: Возьмём для $\forall x_0 \in (a, b)$ и проведем в этой точке касательную к графику функции $\check{y}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Кроме того, в окрестности точки x_0 функция $y = f(x)$ представима по формуле Тейлора (с остаточным членом в форме Лагранжа) в виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2$$

где $x_0 < \xi < x$,

тогда разность между ординатами кривой и касательной к графику функции в точке x_0 будет равна

$$d = f(x) - \check{y}(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2 - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) = \\
&= \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2 \Rightarrow
\end{aligned}$$

Таким образом, знак d совпадает со знаком $f''(\xi)$. Для значений x близких к x_0 , в силу непрерывности функция $f''(x)$ имеет тот же знак, что и $f''(x_0)$.

Если $f''(x_0) > 0$, то и $f''(\xi) > 0$ и $d > 0$ и функция в точке x_0 вогнута, а в силу произвольности точки x_0 и на интервале (a, b) .

Если $f''(x_0) < 0$, то и $f''(\xi) < 0$ и $d < 0$ функция в точке x_0 выпукла, тогда в силу произвольности точки x_0 и на интервале (a, b) . Ч. т. д.

Th2. (необходимое условие точки перегиба)

Если функция $y = f(x)$, непрерывная с непрерывной производной до второго порядка включительно, имеет в точке x_0 — точку перегиба, то

$$f''(x_0) = 0 \text{ или } f''(x_0) = \infty$$

Доказательство: следует из теоремы 1.

. Th3 (достаточное условие точки перегиба)

Если функция $y = f(x)$, непрерывная с непрерывной производной до второго порядка включительно, и вторая производная функции $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то точка x_0 — точка перегиба.

Доказательство: следует из теоремы 1.

Пример 1. Исследовать функцию $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ и построить схематический график.

1) Найдем производную функции $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$,

стационарные точки найдем из условия $f'(x) = 0$

$$12x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0 \text{ и } x_3 = 1$$

Точек, в которых $f'(x) = \mp\infty$, и, в которых производная не существует, нет.

То есть, все критические точки нашей функции $x_{1,2} = 0$ и $x_3 = 1$

2) Отмечаем на оси Ox все критические точки функции $y = f(x)$ и определим знак производной функции $y' = f'(x)$ в интервалах между найденными критическими точками функции. Определим интервалы убывания или возрастания функции.

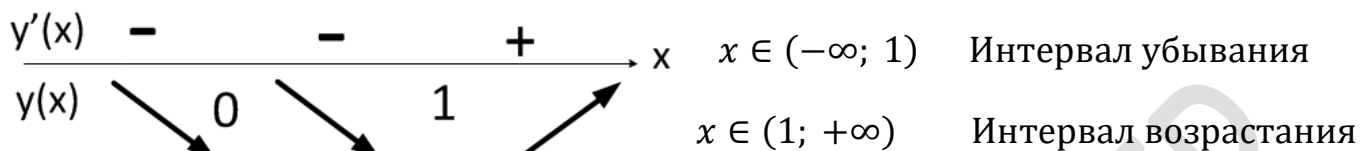


РИС 7.

и $x_3 = 1$ — точка локального минимума функции

3) Находим вторую производную функции и точки, к которым вторая производная функции $f''(x) = 0$ или $f'(x) = \mp\infty$, отмечаем их на оси Ox . Определяем знак второй производной функции $y'' = f''(x)$ в интервалах между отмеченными точками, делаем вывод об интервалах вогнутости или выпуклости функции.

Вторая производная функции $f''(x) = 36x^2 - 24x$

Найдем точки, в которых вторая производная функции $f''(x) = 0$

$$36x^2 - 24x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ и } x_4 = \frac{2}{3},$$

точек, в которых $f''(x) = \mp\infty$, нет

Вторая производная функции $y'' = f''(x)$ меняет знак при переходе через точки $x_1 = 0$ и $x_4 = \frac{2}{3}$,

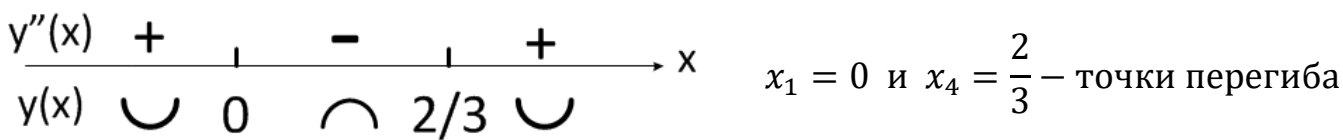
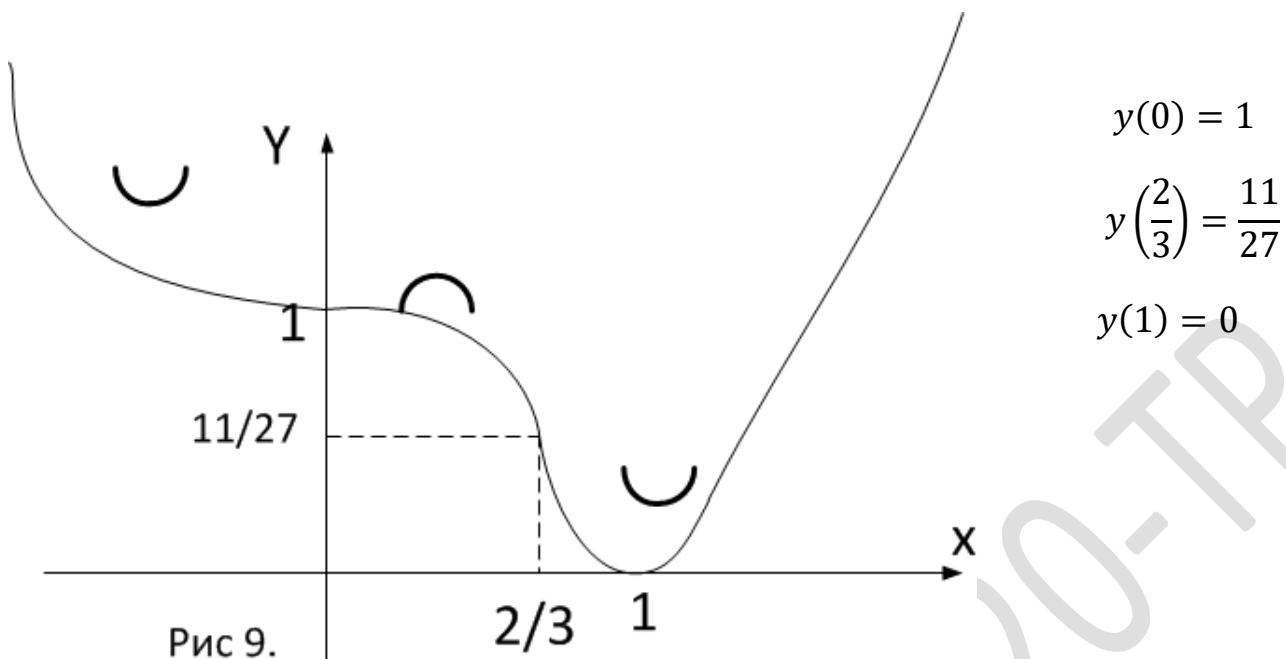


РИС 8.

График функции имеет вид:



10.2 Исследование стационарных точек с помощью производных высших порядков

Th4 (достаточное условие экстремума)

Если функция $f(x)$ в стационарной точке x_0 имеет конечную производную второго порядка и

если $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 – точка максимума функции $y = f(x)$,

если $f''(x_0) > 0$, точка x_0 – точка минимума функции $y = f(x)$.

Th5 (II достаточное условие точки перегиба)

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0

$f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка перегиба функции $y = f(x)$.

Th6 (III достаточное условие экстремума)

Если число $n \geq 1$ – нечетно и функция $y = f(x)$ имеет производные до n -го порядка включительно в окрестности точки x_0 и производную $(n+1)$ -го порядка в точке x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$, но $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, то

если $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, то точка x_0 – точка максимума функции $y = f(x)$,

если $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, то точка x_0 – точка минимума функции $y = f(x)$.

Th7 (III достаточное условие точки перегиба)

Если число $n \geq 2$ – четно и функция $y = f(x)$ имеет производные до n -го порядка включительно в окрестности точки x_0 и производную $(n+1)$ -го порядка в точке x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$, но $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, то

x_0 – точка перегиба графика функции $y = f(x)$.

Пример 2. Исследовать функцию $y = x^{n+1}$ и построить схематический график.

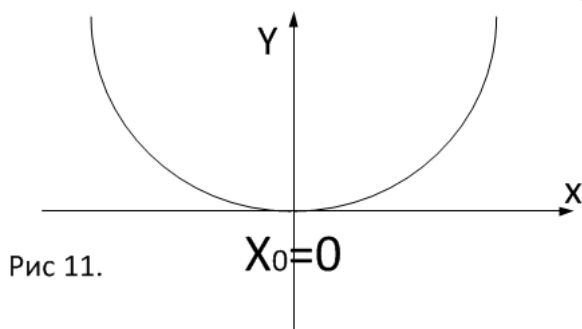


Рис 11.

Если $n = 2k$ – четно, то в точке $x_0 = 0$ имеем

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0,$$

$$\text{но } f^{(n+1)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow$$

x_0 – точка перегиба графика функции (рис.10)

Если число $n = 2k + 1$ – нечетно,

то в точке $x_0 = 0$ имеем

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0,$$

$$\text{но } f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$$

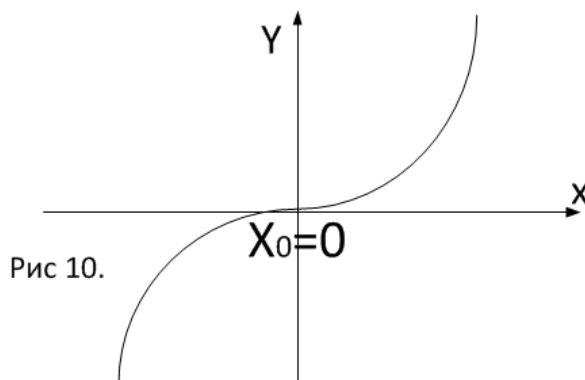


Рис 10.

и $f^{(n+1)}(x_0) > 0$,

то точка x_0 – точка минимума функции (рис.11)

Матан 1-ВМ-2020-ТР